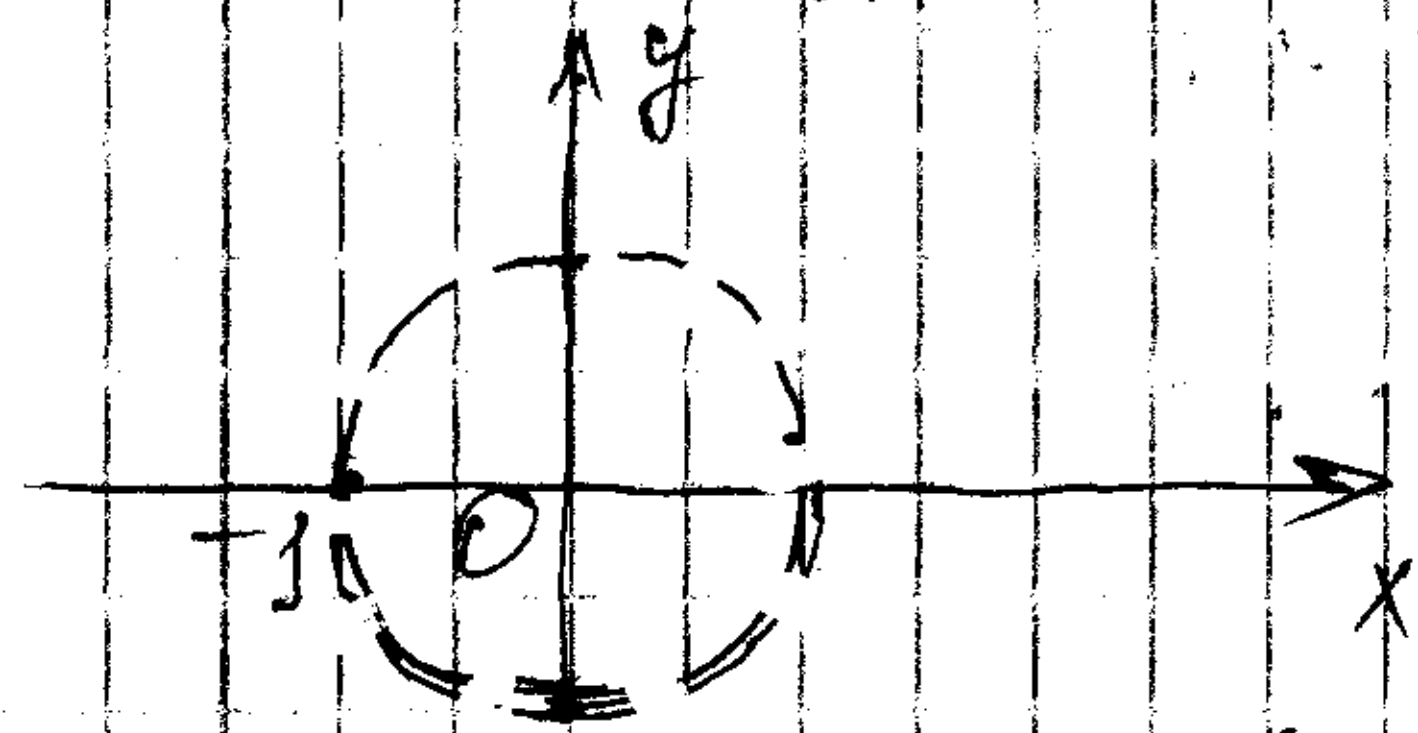


$$e^z (1+z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad |z| < 1$$



$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots$$

для $|z| < 1$

Две последние ф-лы написаны для тех односторонних ветвей, кот. равны 0 и 1 соответственно при $z=0$.

Теор. Вейерштрасса 1:

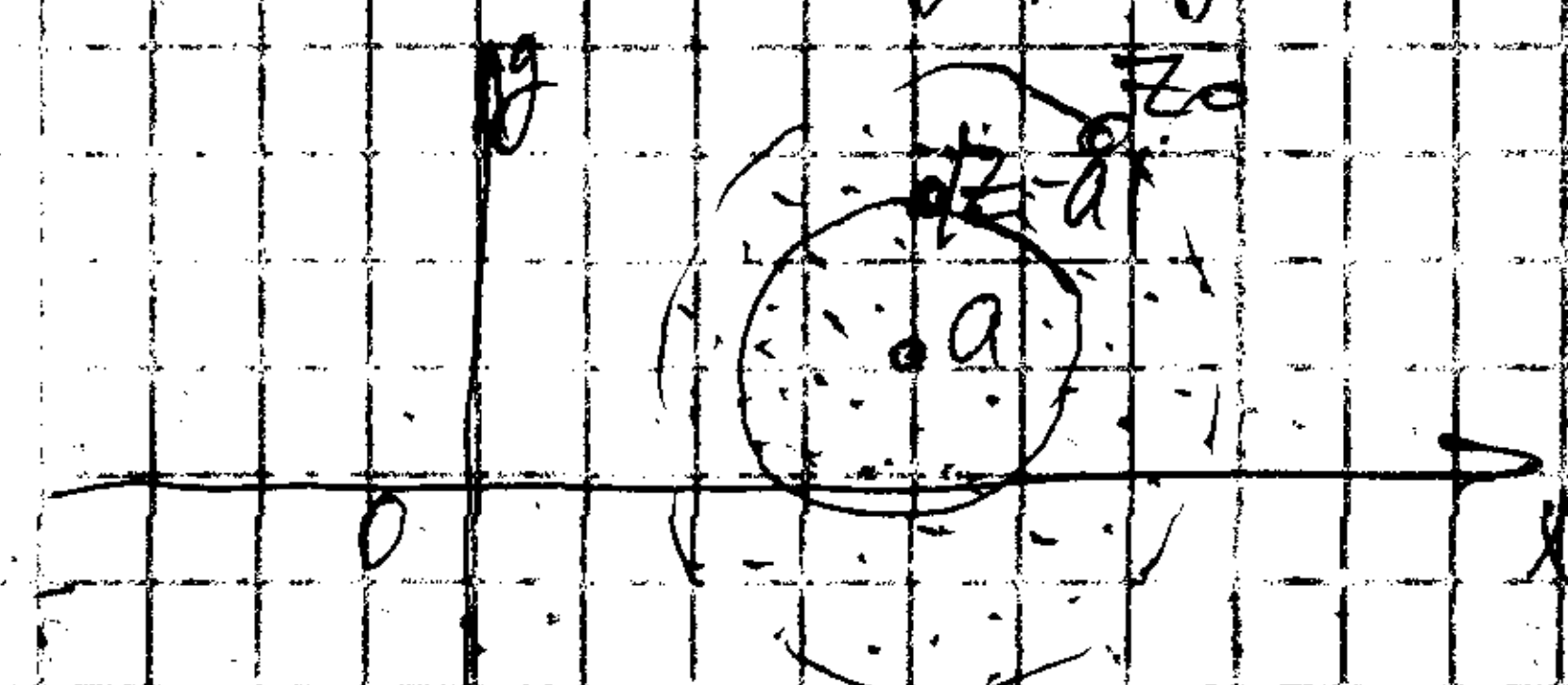
Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ составл. из ф-л аналитич. в одной области D , равномерно сход. в этой обл., то его сумму так же себе ф-л аналитич. в D . $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$

Теор. Вейерштрасса 2:

Продолж. ряд, составл. из ф-л аналитич. в D и непрерывн. в $\bar{D}$ равномерно сход. на $\bar{D}$ можно почленно диф-ть в D и число раз.

Теорема Абеля: (характеристика того ряда)

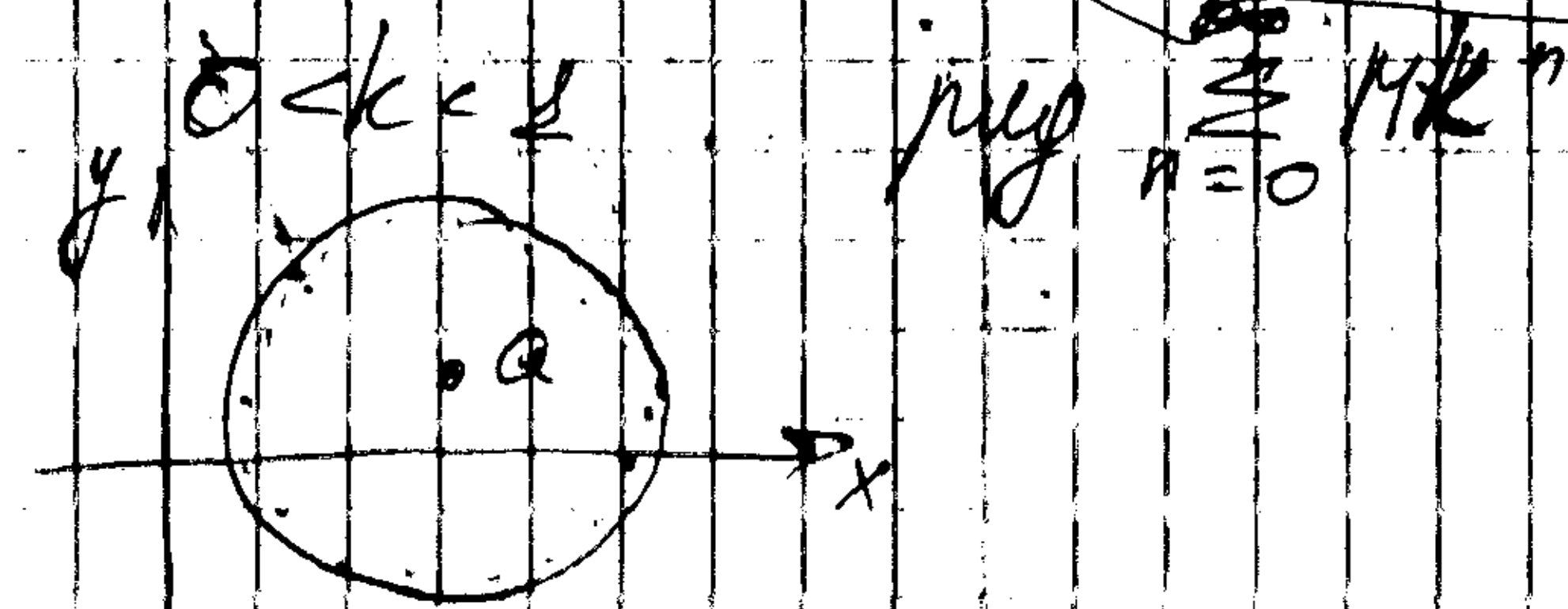
- $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ - на степенный ряд
- Если степен. ряд сход. в z_0 , то он сход. и в $\forall z \in D$, расположен ближе к центру a , чем z_0 , причем в $\forall$ круге $|z-a| \leq k|z_0-a|$, $0 < k < 1$ сход. ряда равномерна



Дока-во: Пусть $|C_n|/|z-a|^n = |C_n|/|z_0-a|^n$. $\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}$, т.к. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_0-a)^n$ - сход., то получим: член ряда $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow$

- $\Rightarrow$ для $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$: $|C_n (z_0-a)^n| < M, \forall n$
- т.к. z ближе к a , чем z_0 , то $|z-a|^n \leq k^n |z_0-a|^n$, то $|C_n (z_0-a)^n| \cdot \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \leq M k^n$

$\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \leq k$, то $|C_n (z_0-a)^n| \cdot \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \leq M k^n$



$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

Теор 1:

Сумма и степенной ряда в круге его сходимости есть аналитическая ф-ция.

Теор 2: (теор. о-ти разл. в пред. Тейлора)
+ Сумма ряда есть рядом Тейлора своей суммы.

Пусть в круге сходимости ряда есть
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots$

1) Пусть $z=a$
 $f(a) = z_0$

2) Продифференцируем: $f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \right)' =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot n (z-a)^{n-1}$
 $z=a \quad f'(a) = C_1$

$$C_1 + 2C_2(z-a) + \dots + nC_n(z-a)^{n-1}$$

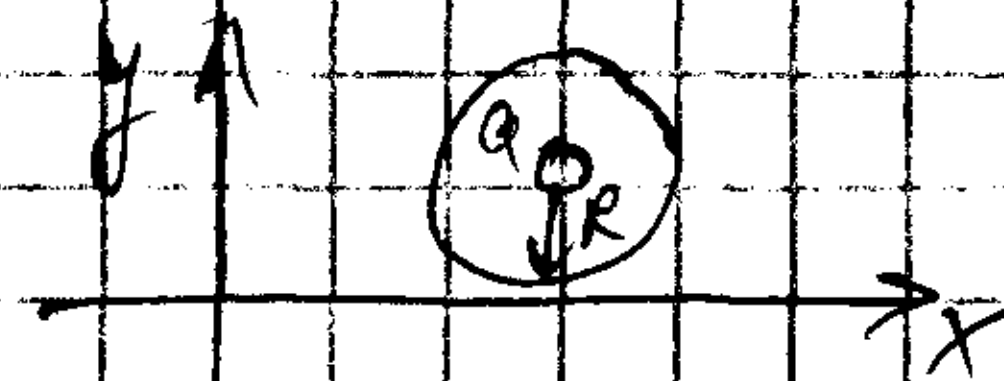
3) Продифференцируем и положив $z=a$
 $f''(a) = 2! C_2, \dots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

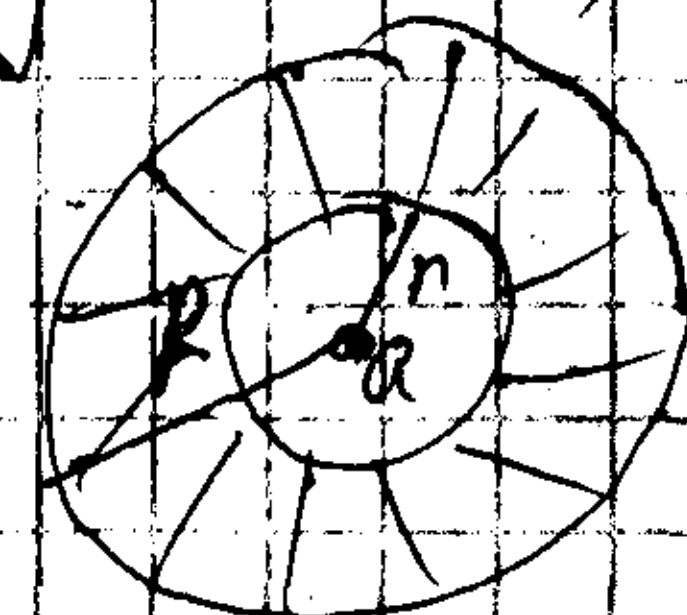
Ряды Лорана 8 вып.

Если ф-ция $f(z)$ - аналитична в некоторой окрестности т. а. велоду, кроме самой т. а., приклад-ся раскл. лорановый ряд вида:

$$0 < |z-a| < R$$



Пусть $f(z)$ - аналитична в обл. $r < |z-a| < R$
 $r \geq 0, R \leq \infty$, то её можно разложить по лорану.
и отсюда следует $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$

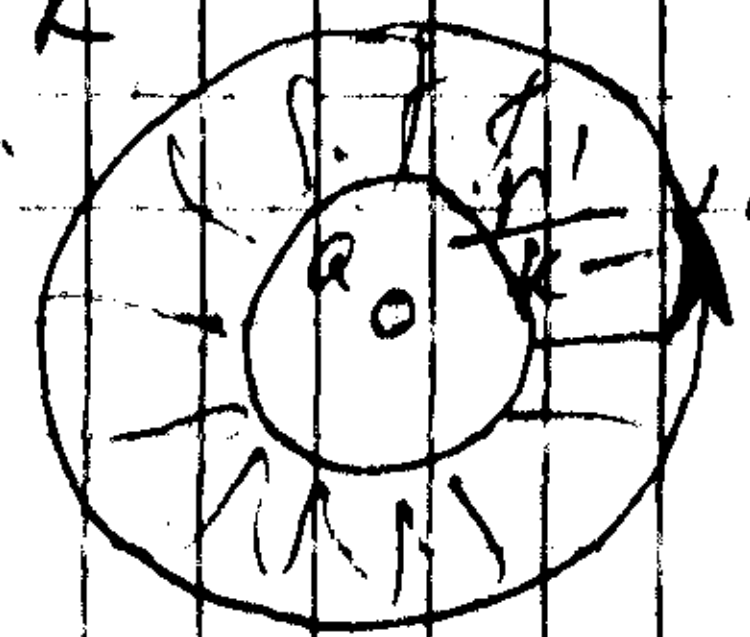


Теор.:

Пусть $f(z)$ - аналитична в обл. $r < |z-a| < R$
(где $r \geq 0, R \leq \infty$) Возьмем $r' > r, R' < R$
Расскл. область $r' < |z-a| < R'$

Возьмем $0 < R_1 \leq 1, R = 1$

$$\frac{r'}{R} < |z-a| < R R'$$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$C: |z-a| = R'k$$

$$C: |z-a| = \frac{r}{k}$$

C, C' - обн. против час стрелки

Внутри z внутри кольца: z - по кольцу

$$\left| \frac{z-a}{z-a} \right| < \frac{R'k}{R'} = k < 1$$

Рассм. 1-ый интеграл.

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-a+z-a} = \frac{1}{(z-a) - (z-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{z-a}\right)}$$

$$= \frac{1}{z-a} \cdot \left[1 + \frac{z-a}{z-a} + \left(\frac{z-a}{z-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{z-a}\right)^n + \dots \right]$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, |z| < 1$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \cdot \left[\frac{1}{\zeta-a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \dots \right] d\zeta$$

$$f_1 = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots + C_n(z-a)^n$$

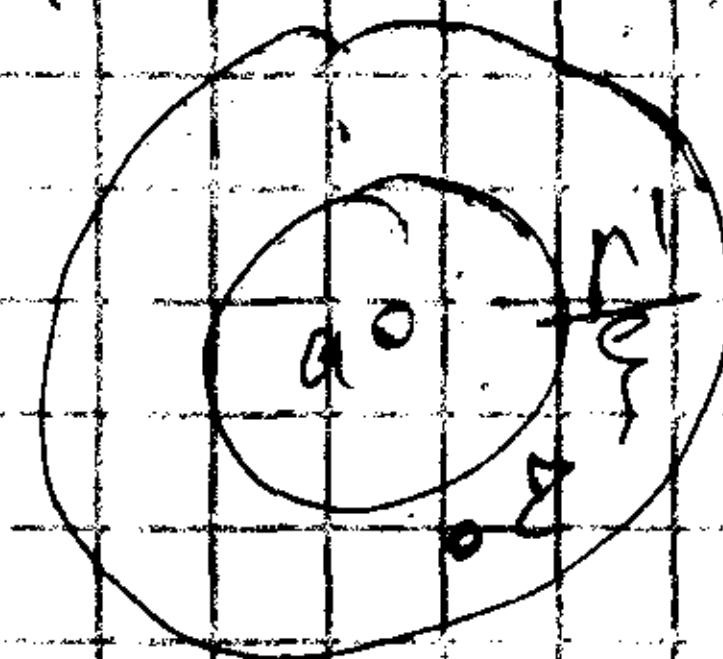
$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

$$\left| \frac{z-a}{z-a} \right| < \frac{r}{R'} = k < 1$$



$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \cdot \left[1 + \frac{z-a}{z-a} + \left(\frac{z-a}{z-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{z-a}\right)^n + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{z-a} \left[1 + \frac{z-a}{z-a} + \frac{(z-a)^2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \dots \right]$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta-a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \dots \right] d\zeta =$$

$$= \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta + \frac{1}{(z-a)^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) (z-a) d\zeta + \dots + \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) (z-a)^n d\zeta + \dots$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) (z-a)^n d\zeta$$

$$f_2(z) = \frac{C_0}{z-a}$$

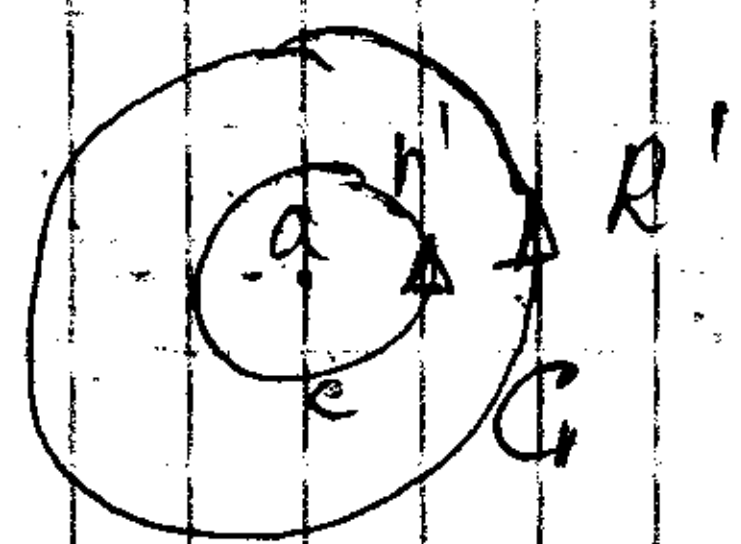
3.04.08

Теорема: $f(z)$ - аналитич.

$$r < |z-a| < R; \quad r \geq 0, R \leq \infty$$

Возьмем $r < r' < R' < R$, где всех z !

$$\frac{r'}{R} < |z-a| < kR' \quad 0 < k < 1$$



$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Рассуждаем интерпр. по стрелочности.

$$C: |\zeta - a| = R'$$

$$C': |\zeta - a| = r'$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

$$|t| < 1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \dots \right]$$

$$\textcircled{V} = \frac{1}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \dots \right]$$

$$I) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{f(\zeta)(z-a)}{(\zeta - a)^2} + \frac{f(\zeta)(z-a)^2}{(\zeta - a)^3} + \dots + \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots \right] d\zeta = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \frac{(z-a)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \dots$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \Rightarrow f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

$$II) C: |\zeta - a| = r'$$

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \frac{r}{r'/k} = k < 1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \left[1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \dots \right]$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{f(\zeta)(z-a)}{\zeta - a} + \frac{f(\zeta)(z-a)^2}{(\zeta - a)^2} + \dots + \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots \right] d\zeta$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)(z-a)}{\zeta - a} d\zeta + \dots - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \dots$$

$$\text{Возьмем } f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

$$f_2(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z-a)^{-n}$$

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z-a)^{-n}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

* к. контур γ' и γ'' можно брать прод.

γ - общим.

$$\gamma: |\xi - a| = \rho \quad \rho' < \rho < \rho''$$

* к. $0 < \rho < \rho''$ это верно $\forall \rho$

$$\rho' < |\xi - a| < \rho''$$

Теор. Лорана:

В к. кольце $0 < |\xi - a| < R$, в кот. $f(\xi)$ - аналитична, эта ф-ция может быть представлена своим рядом Лорана равномерно сходящимся в замкнутой области $\in$ кольцу S .

Особые точки. (устраиваем, комп.)

Опр.: τ -а a -ку. устранимой особой т-ой ф-ции $f(\xi)$, если $\exists$ окрестность $0 < |\xi - a| < R$ этой точки (с исм. τ -а), в кот. $f(\xi)$ - аналитична. Речь идет о точках, в окрестн. кот. ф-ция однозначна.



$\exists$ 3 типа особых точек

1) τ -а a ку. устранимой особой точкой, если $\exists \lim_{\xi \rightarrow a} f(\xi)$ - конечный, то a - устранимая особая т.

2) τ -а a ку. полюсом, если $f(\xi)$ бесконечно большой при $\xi \rightarrow a$.

3) τ -а a ку. существенно особой т-ой, если

$$\lim_{\xi \rightarrow a} f(\xi) = \infty$$

$$\left(\lim_{\xi \rightarrow a} |f(\xi)| = \infty \right)$$

3) τ -а a ку. существенно особой т-ой, если $\lim_{\xi \rightarrow a} f(\xi)$ не существует

$$\forall \xi: 0 < |\xi - a| < R$$

$$f(\xi) = \dots + \frac{C_{-2}}{(\xi - a)^2} + \frac{C_{-1}}{(\xi - a)} + \underbrace{C_0 + C_1(\xi - a) + C_2(\xi - a)^2 + \dots}_{\text{правильная часть}}$$

Теорема:

Для того, чтобы τ -а была устранимой особой т-ой ф-ции $f(\xi)$, аналитич. в области

$0 < |\xi - a| < R$ надо и дост., чтобы Лоранов-ский ряд ф-ции $f(\xi)$ в окрестн. τ -а не

содержанию главной части.

Док-во:

I) Пусть Лорановское разлож. ф-ции $f(z)$ не содержит н. часть. Док-м, что тогда т.а. — устр. особая точка.

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

Если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \Rightarrow \exists$ конечный предел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.а. — устранимая особая т.а.

II) Пусть а — устранимая особая т. $\Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = c \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ окрестность т.а., в кот. ф-ция ограничена

$\exists M: |f(z)| \leq M$ — по к-ву Коши

0 — может быть взято сколь угодно малым

$c_n = 0$, где n — отриц. целые числа. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ н. часть р. Лорана отсутствует.

Если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$, то можно

если положить $f(a) = c_0$, то ф-ция станет анал.

внутри круга

Теорема:

Анал. тожд. тогда т.а. будет полюсом ф-ции $f(z)$

необх. и дост., чтобы главная часть р. Лорана

в окрестности т.а. содержала лишь

конечное число членов

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad \exists \text{ окр. т.а. } g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0, \text{ т.е. т. } z=a \text{ — будет нулем}$$

ф-ции $g(z) \Rightarrow$ т.а. — устранимая особая

т. для ф-ции $g(z)$

Верно и обратное: т.е. если а — нуль ф-ции $g(z)$, то т.а. — полюс ф-ции $\frac{1}{g(z)}$

Теорема:

Т.а. а — является существенной особой т-ей ф-ции $f(z)$ тогда и только тогда, когда выполнят

- часть ряда Лорана ф-ции $f(z)$ в окрестности
- т.а. содержит бесконечно много членов

Опред: Будем называть порядком полюса а ф-ции $f(z)$ порядок 0 т.и а ф-ции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$

Пример:

$$b) f(z) = \frac{1}{z}$$

$z \neq 0$ — устранимая особая т.а

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$$x) f(z) = \frac{1 - e^z}{z}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$1 - e^z = -z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - \dots$$

$$\frac{1 - e^z}{z} = -1 - \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} - \dots$$

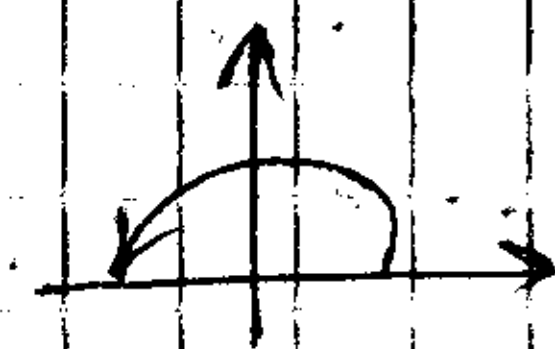
$z=0$ — устр. особая т.а

$$3) f(z) = \frac{1}{e^{z^2} + 1}$$

$$e^{z^2} + 1 = 0$$

$$e^{z^2} = -1$$

$$z^2 = \ln(-1) =$$



$$= i(1 + 2k\pi)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$$z_k = \pm \sqrt{(2k+1)\pi i} \text{ — особые точки}$$

полюс

$$\frac{1}{f(z)} = e^{z^2} + 1 = g(z)$$

наши особые точки есть нули этой функции

$$g(z_k) = 0$$

$\Rightarrow$ нули 1-го порядка

$$g'(z) = e^{z^2} \cdot 2z$$

$$g'(z_k) \neq 0 \Rightarrow \text{полюсы 1-го порядка}$$

$$4) f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad z=0$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

главная часть

сущесв. особая т.а

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$$

$z=0$ — сущесв. а. точка

Вытекает V 10

Опр. Вытекает из $f(z)$ в окрестности т.а a число $\text{res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = c_1$, где γ — достаточно малая окружность, прох. в положительном направлении.

$$\gamma: |z-a| = \rho, \text{ при этом велич. вытека}$$

не зависит от ρ для достаточно малых ρ .

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Вытекает: $f(z)$ в окрестности т.а равен прох. при $f(z)$ сходимости в Лорановской разлоси.

$f(z)$ в окрестности т.а.

1) Если т.а — устранимая особая точка, то $c_{-1} = 0, \Rightarrow \text{res } f(a) = 0$.

10.04.08.

2) Если $z=a$ — полюс n -го порядка
 $\text{res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-a)^n)$
 $f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) +$
 $+ C_2(z-a)^2 + \dots$

умножим $(z-a)^n$
 $f(z)(z-a)^n = C_{-n} + C_{-n+1}(z-a) + \dots +$
 $+ C_{-1}(z-a)^{n-1} + \dots + C_0(z-a)^n + C_1(z-a)^{n+1} + \dots$
 $\frac{d}{dz} (f(z)(z-a)^n) = C_{-n+1} + C_{-n+2} \cdot 2(z-a) + \dots +$
 $+ (n-1)(z-a)^{n-2} C_{-1} + n C_0 (z-a)^{n-1} + \dots$

Если пропуск $(n-1)$ раз, то получим:
 $\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-a)^n) = (n-1)(n-2) \dots 2 C_{-1} +$
 $+ n(n-1) \dots 2 C_0 (z-a) + \dots$

$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-a)^n) = (n-1)! C_{-1}$

$C_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-a)^n)$

Если $z=a$ — полюс 1-го порядка
 $C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^1$

Если $z=a$ — полюс 1-го порядка, то
 $\text{res } f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$

Если $f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ $\varphi(z), \psi(z)$ — аналитич. в
 окрестн. $z=a$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a)=0$, $\varphi'(a) \neq 0$
 $\text{res } f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} (z-a) = \frac{\psi(z)}{\frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{(z-a)}} = \frac{\psi(a)}{\varphi'(a)}$

Теор. Коши II вып.

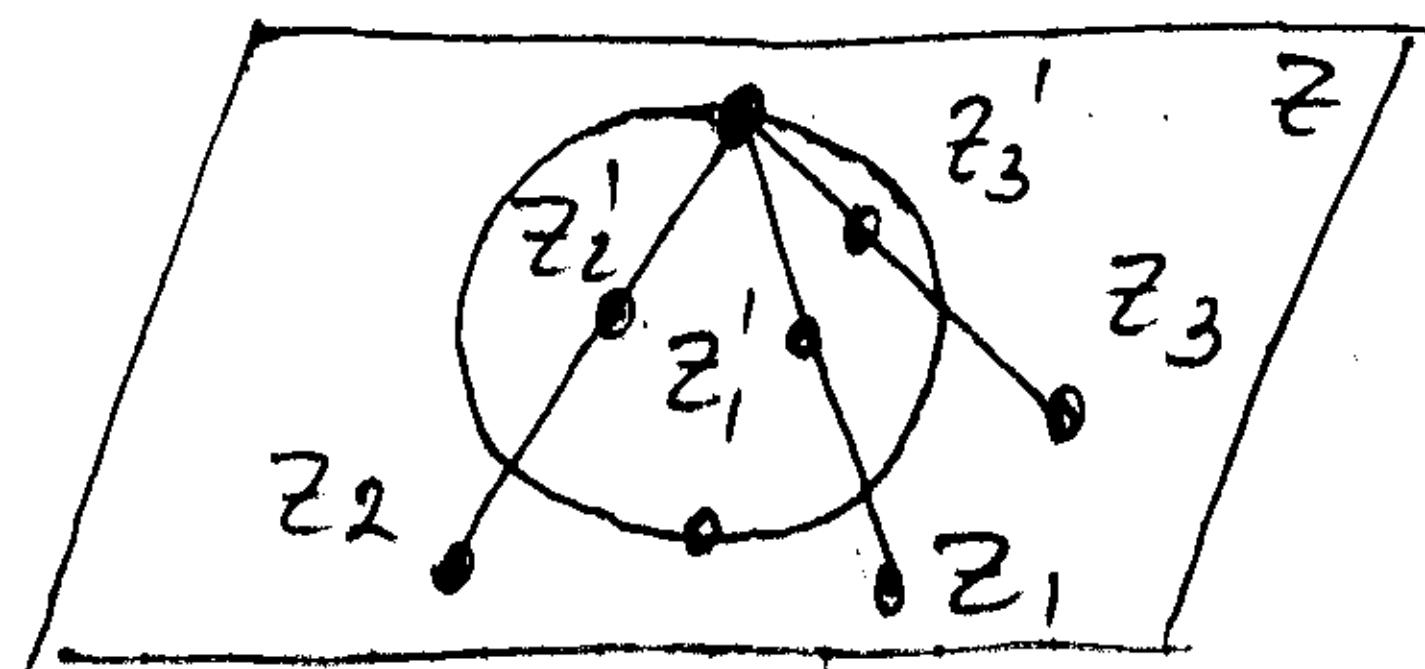
Пусть $f(z)$ — вып. на границе C обл-ти D
 и аналит. внутри D , за исключ. конечного ис-
 на особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res } f(z_k)$$

$d(z)$ — вып. на C :

$\forall z_0 \in C \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, где $z \rightarrow z_0$ —
 осущ. по точкам z , лм. внутри обл-ти.

бесконечно удаленные точки



Рассм. стереограф. проекцию w -ти z на сферу,
кас. w -ти z .

Точки z' - сферич. пробр. w -ти z

Беск. удал. точка - соответствующие северному полюсу
при стереограф. проекции.

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} z \quad ? \quad z_n \rightarrow \infty?$$

окр. ∞ уд. точки $|z| > R$

Пусть $f(z)$ - аналит. в неск. окр.-ти $\forall z = \infty$

$\forall z = \infty$ - устр. особ. т., если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$

$\forall z = \infty$ - полюс, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

$\forall z = \infty$ - сущ. особ. т., если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ - не сущ.

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \varphi(\xi)$$

$\xi = \frac{1}{z}$, если $z = \infty$ - особ. т. ф-ии $f(z)$

$\xi = 0$ - особ. т. ф-ии $\varphi(\xi)$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi)$$

Разложение $\varphi(\xi)$ в окр. $\forall z = 0$

Разлож. $f(z)$ в окр. $\forall z = \infty$

Наро в разлож. для $\varphi(\xi)$, $\xi = \frac{1}{z}$

$$\varphi(\xi) = \underbrace{\dots \frac{C_{-n}}{\xi^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{\xi^2} + \frac{C_{-1}}{\xi}}_{\text{л. часть}} + \underbrace{C_0 + C_1 \xi + \dots}_{\text{прав. часть}}$$

Теор. В случае устранимой особ.-ти беск. удал.
точки Лорановское разлож. ф-ии $f(z)$ в окрестн.
этой т. не содержит положительных степеней z .

В случае полюса сод-т их конечное число.

В случ. сущ. особенности - беск. число.

$$f(z) = \underbrace{\dots C_{-n} z^n + \dots + C_{-2} z^2 + C_{-1} z}_{\text{л. часть}} + \underbrace{C_0 + \frac{C_1}{z} + \dots}_{\text{прав. ч.}}$$

Опр. Под вычетом беск. удал. точки понимается

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

$C: |z| = \rho$ - дост. большого радиуса контур C ,
обход по час. стрелке

Теор. Если ф-ия $f(z)$ - аналит. во всей конпл.

w -ти, за неск. конечн. числа особ. точек, то
сумма всех ея вычетов, вклот. и вычет в ∞ , $= 0$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz =$$

$$= \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res} f(z_1) - \operatorname{res} f(z_2) - \dots - \operatorname{res} f(z_n)$$

Аналитическое продолжение

Пусть в обл.-ти D , задана аналит. ф-ия $f(z)$,

в обл-ти D_2 задана аналит. ф-ия $f_2(z)$.
 Пусть обл-ти D_1 и D_2 не имеют общих ^{внутр.} точек
 и имеют общий участок границы δ

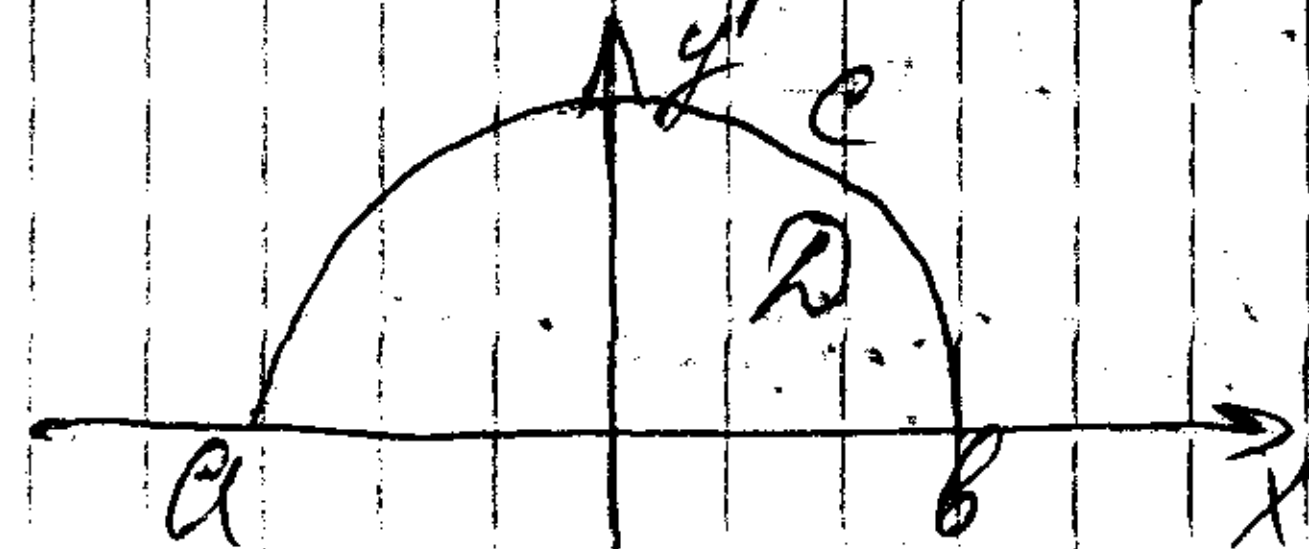
Опр: Ф-ия $f_1(z)$ -аналит. продолжение ф-ии $f_2(z)$, если $\exists$ аналит. в обл-ти $D_1 + \delta + D_2$ ф-ия $f(z) = f_1(z)$ во всех точках D_1 и $f(z) = f_2(z)$ во всех точках D_2 .

Теор: Пусть даны 2 односвязные обл-ти D_1 и D_2 без общих внутр. точек, такие, что их границы имеют один общий кусок δ , и в этих обл-ях заданы соотв. ф-ии $f_1(z)$ и $f_2(z)$ -аналит. Если кроме того эти ф-ии совп. в $D_1 + \delta$ и $D_2 + \delta$ и совп. во всех точках кривой δ $f_1(z) = f_2(z)$, то ф-ия $f_1(z)$ -явл. аналитичным продолжением ф-ии $f_2(z)$ в обл-ти D_1 .

Вычисление интеграла

Пусть треб. вычисл. интеграл $\int_a^b f(x) dx$
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ вычисл. с пом-ю интегр.

0 комплексной ф-ии



Дополним $[a, b]$ кривой C , тогда

• $f(x)$ аналитич. в обл. D . Продолжим ф-ию $f(x)$ аналит. применим теор. о вычетах

$$\int_a^b f(x) dx + \int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot R$$

^a R -сумма вычетов в осб. точках $\in D$.

Лемма Мордана:

Пусть $f(z)$ такова, что на нек. послед-ти

• дуг окружн.: C_{R_n} : $|z| = R_n$



$\text{Im } z > a$, a -фиксир.

ф-ия $f(z)$ удовл.

$$\max_{C_{R_n}} |f(z)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

То гдет $\forall \lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

гдет $\forall \lambda > 0$.

Пример: $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + a^2}$$

Вспомогательная функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$

$$= \frac{\cos z}{a^2 + z^2} + i \frac{\sin z}{a^2 + z^2}$$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{a^2 + z^2} \right| = \frac{1}{|z^2 + a^2|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$|z| = |R| e^{i\varphi}$$

$$\frac{1}{z^2 + a^2} < \frac{1}{R^2 + a^2} = 0$$

на окр. $|z| = R$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} - \text{голова Леммы Морриси}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{CR} \frac{1}{z^2 + a^2} e^{iz} dz = 0$$

Расси

↑ y



$$z = x + iy$$

$$z = x$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx + \int_{CR} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i R$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{CR} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i R$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i R$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} = \frac{e^{iz}}{(z - ai)(z + ai)}$$

$$z = ai, z = -ai \notin D \text{ при } R > a$$

$$z = ai, f(z) = \frac{e^{iz}}{(z - ai)(z + ai)} = \frac{e^{iz}}{(z - ai)} - \frac{e^{iz}}{(z + ai)}$$

$z = ai$ - полюс 1-го порядка

$$\begin{aligned} \varphi(ai) &\neq 0 \\ \psi(ai) &= 0 \\ \psi'(ai) &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{res } f(z) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} (z - ai) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{e^{iz}}{z + ia} = \frac{e^{-a}}{2ai}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \frac{e^{-a}}{2ai} 2\pi i = \frac{e^{-a}}{a} \pi$$

$$\frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} = \frac{\cos x}{x^2 + a^2} + i \frac{\sin x}{x^2 + a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a} + i \cdot 0$$

$$\frac{\pi}{a} e^{-a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}$$

Правильно вычислено:

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx : f(x) &= \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, m \geq n+2 \\ \text{Тогда, если } q \text{-ый } \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \text{ не имеет} \\ \text{полюсов на вещественной оси, то } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res } \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \end{aligned}$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ - нули ф-ции $Q_m(z)$, или
в верхней полуплоскости

Пример:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} \frac{z^2}{(z^2+9)^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=3i} f(z)$$

$z=3i$ - в верхней
 $z=-3i$ - в нижней п/п-и

$$\frac{z^2}{(z^2+9)^2} = \frac{z^2}{(z-3i)^2(z+3i)^2}$$

$z=3i$ - полюс 2-го порядка

$$\operatorname{res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z-3i)^2(z+3i)^2} \right) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z+3i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{6z}{(z+3i)^3} = \frac{18}{216(-i)} =$$

$$= \frac{1}{12i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{12i} = \pi/6$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{1}{2} I = \frac{\pi}{12}$$

Если $P(z)$ - многочл. в п/п-и $\operatorname{Im} z \geq 0$

то можно найти точки $z_1, z_2, \dots, z_n$, и т.д.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(\Phi(z) e^{i\lambda z}), \lambda > 0$$

17.04.08.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda x \Phi(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda x \Phi(x) dx$$

$$\cos \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} \quad \sin \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}$$

1) $\Phi(x)$ - четная

$$e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) [\cos \lambda x + i \sin \lambda x] dx = 2 \int_0^{\infty} \cos \lambda x \Phi(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} (\Phi(z) e^{i\lambda z})$$

2) $\Phi(x)$ - нечетная

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) [\cos \lambda x + i \sin \lambda x] dx = 2i \int_0^{\infty} \sin \lambda x \Phi(x) dx = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} (\Phi(z) e^{i\lambda z})$$

II способ вычисления:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

$R(u, v)$ - рац. ф-ция перемен. u, v
 $R(\cos t, \sin t)$ - рац. ф-ция $0 \leq t \leq 2\pi$

Замечание: $z = e^{it}$

$$dz = ie^{it} dt$$

$$dz = iz dt \rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{it} + \frac{1}{e^{it}}}{2}$$

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

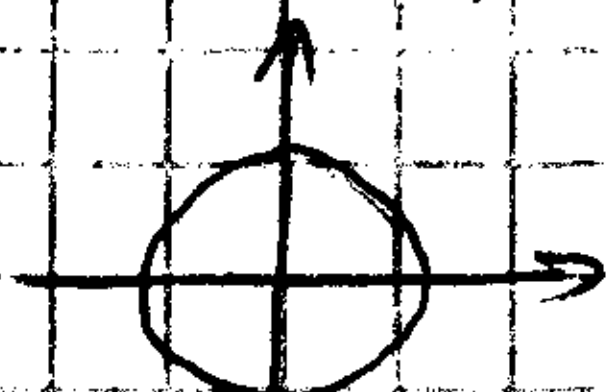
$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} R(z) \frac{dz}{iz} = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{R(z)}{iz} \right)$$

$$z = e^{it}$$

$$|z| = |e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$|z| = 1$$



z_k — точки внутри $|z|=1$

Пример:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t + 2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{\frac{z^2+1}{2z} + 2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} \quad (*)$$

$$z = e^{it}$$

$$dz = ie^{it} dt$$

$$dz = iz dt$$

$$\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$dt = \frac{dz}{iz}$$

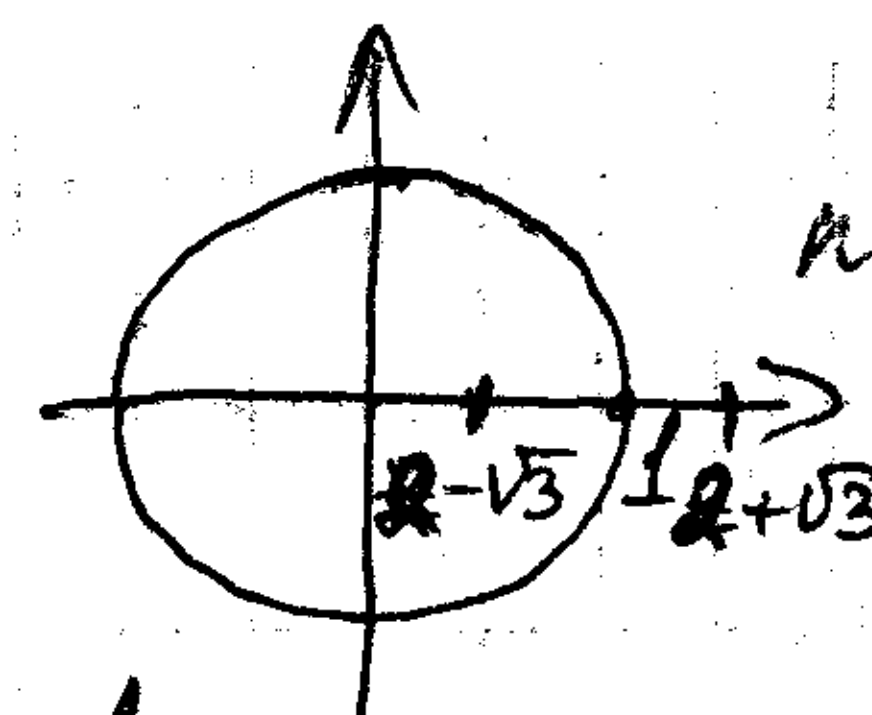
$$(*) = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1} = (V) \quad D = 16 - 4 = 12$$

$$z^2 - 4z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$z_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 - \sqrt{3}$$



нашое 1-го
порядка

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 1} = \frac{1}{(z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3})}$$

$$\operatorname{res}_{z=2-\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2-\sqrt{3}} \frac{1 \cdot (z - 2 + \sqrt{3})}{(z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3})} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

$$(V) = \frac{1}{i} 2\pi i \operatorname{res}_{z=2-\sqrt{3}} f(z) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Операционные исчисления.

Преобразование Лапласа. 12 вып.

Опр. Оригинал — н.ч. $\forall$ ф-ция $f(t)$ (t — действит., перемен.) опер. на всей числ. оси и удовл. след. требованиям:

1) $f(t)$ — вып. на всей числ. оси за воз-можными искл. точкам разрыва 1-го рода в конечном числе на каждом интервале конечной длины.

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$.

3) Если $M > 0$ и $s_0 > 0$, тогда, что
 $\forall t: |f(t)| \leq M e^{s_0 t}$

число s_0 наз. показателем роста ф-ии $f(t)$

Опр: Обратимой ф-ии $f(t)$ наз ф-ию комплексного пер-го $p = s + i\omega$ опер.

$g(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, где $f(t)$ — оригинал

Интеграл Лапласа

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к цообр $g(p)$ наз преобраз. Лапласа. Фра-гу оригинал $f(t)$ имеет цообр $g(p)$

$g(p) = L(f(t))$

$f(t) \doteq g(p)$

Опр: Операт. исчисления наз теорией преобраз. Лапласа.

$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ — эта часть опускается

Пример: $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ оригинал

$g(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$

при $\text{Re } p > 0$

$|e^{-pt}| = |e^{-(s+i\omega)t}| = |e^{-st}| |e^{-i\omega t}| = e^{-st} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

при условии, что $s > 0 \Rightarrow \text{Re } p > 0$.

① $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ при $\text{Re } p > 0$.

② $f(t) = e^{\alpha t}$

$g(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p-\alpha}$

$\text{Re}(p-\alpha) > 0, \text{Re } p > \text{Re } \alpha$

$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha} \quad \text{Re } p > \text{Re } \alpha$

α — произв. действ. число

Интеграл Лапласа для ф-ии комплекс. пер-го p и где оно верно теор.

Теор: Для $\forall$ оригинала $f(t)$ цообраз. $g(p)$ опер. в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$, где s_0 — показ. роста ф-ии $f(t)$ и в этой

келушкосту p -и $g(p)$ -еви аналитической

Св-ва преобраз. Лапласа:

1) Св-во линейности

$f_1(t) \doteq g_1(t); f_2(t) \doteq g_2(t)$, тогда

$Af_1(t) + Bf_2(t) \doteq Ag_1(t) + Bg_2(t)$

Док-во: Рассм. $Af_1(t) + Bf_2(t) \doteq$

$$= \int_0^{+\infty} [Af_1(t) + Bf_2(t)] e^{-pt} dt =$$

$$= A \underbrace{\int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt}_{g_1(p)} + B \underbrace{\int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt}_{g_2(p)} =$$

$$= Ag_1(p) + Bg_2(p)$$

Пример: Найти изобр. $g(p)$ $f(t) = \sin at$

$$\sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$\sin at \doteq \int_0^{+\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(p-ia)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(p+ia)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{1}{p-ia} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p+ia} = \frac{1}{2i} \left[\frac{p+ia - p+ia}{p^2+a^2} \right] =$$

$$= \frac{2ia}{2i(p^2+a^2)} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

$$\sin at \doteq \frac{a}{p^2+a^2} \quad \text{при } \operatorname{Re} p > \operatorname{Im} a$$

• а) Теор. подобия:

$$f(t) \doteq g(p); \quad \forall a > 0 \quad f(at) \doteq \frac{1}{a} g\left(\frac{p}{a}\right)$$

Док-во:

$$f(at) \doteq \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt} dt = \int_{t=\frac{u}{a}}^{+\infty} \frac{u=at}{dt=\frac{du}{a}} =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u) e^{-p \frac{u}{a}} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-\frac{p}{a} u} du =$$

$$= \frac{1}{a} g\left(\frac{p}{a}\right)$$

Дифференцирование оригиналов.

Теор: Если $f(t)$ - оригинал с показ. роста s_0 и $f(t) \doteq g(p)$ и $\exists f'(t)$ (по крайней мере при $t \neq 0$), еви. оригинал.

• Тогда: $f'(t) \doteq pg(p) - f(0)$

• при $\operatorname{Re} p > s_0$ и $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$

$$\text{Д-во: } f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \begin{cases} u = e^{-pt} \\ u' = -pe^{-pt} \end{cases}$$

$$= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} pe^{-pt} f(t) dt = \textcircled{V}$$

при $t \rightarrow 0+$

$$f(t)e^{-pt} \rightarrow f(0)$$

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{s_0 t} |e^{-(s+i\delta)t}| =$$

$$= Me^{s_0 t} e^{-\delta t} |e^{-i\delta t}| = Me^{s_0 t - \delta t} =$$

$$= Me^{(s_0 - \delta)t} = Me^{-(\delta - s_0)t} \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty$$

$$\textcircled{V} = 0 - f(0) + \underbrace{p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt}_{g(p)} = pg(p) - f(0)$$

Пример:

$$shat = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

Най-и, изобраз. fun chat.

$$(shat)' = a chat$$

$$(shat)' = p \frac{a}{p^2 + a^2} + 0 = \frac{pa}{p^2 + a^2}$$

$$a chat = \frac{pa}{p^2 + a^2}$$

$$chat = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

Терп Если $f(t)$ евл. оригиналом с

показ. роста s_0 и известно, что $f(t) \doteq g(p)$

$\exists f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ (но крайней не-
ре при $t \neq 0$), кот. евл. оригиналами

$f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0)$ - правые пре-

дельные функ, тогда:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n g(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Дифференцирование изображений.

$f(t)$ - оригинал, $g(p) \doteq f(t)$

$$g(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$g(p)$ - анал. в $\text{Re } p > s_0$

$$g'(p) = \frac{dg}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{(t f(t))}_{f(t)} e^{-pt} dt$$

$$f(t) \doteq -g'(p)$$

$$t f(t) \doteq -g''(p)$$

$$g'(p) \doteq -t f(t)$$

Покажем, что $-tf(t)$ — тоже опр. функция

при: $\text{Re } p > s_1 > s_0$

$$\frac{|-tf(t)|}{e^{s_1 t}} \leq \frac{Me^{s_0 t}}{e^{s_1 t}} \leq tMe^{-(s_1 - s_0)t} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ если $s_1 > s_0$

$$|-tf(t)| \leq Me^{s_1 t}$$

т.е. $-tf(t)$ — опр. функция

$$f(t) \equiv g(p)$$

$$g'(p) \equiv -tf(t)$$

$$g''(p) \equiv -t(-tf(t)) = (-1)^2 t^2 f(t)$$

$$g^{(n)}(p) \equiv (-1)^n t^n f(t)$$

Пример:

$$e^{pt} \equiv \frac{1}{p-g}$$

$$-t^n e^{pt}$$

$$(-1)^n t^n f(t) \equiv \left(\frac{1}{p-g}\right)^n$$

$$\frac{1}{p-g} = (p-g)^{-1}$$

$$((p-g)^{-1})' = -1(p-g)^{-2}$$

$$((p-g)^{-1})'' = -1(-2)(p-g)^{-3}$$

$$((p-g)^{-1})''' = -1(-2)(-3)(p-g)^{-4}$$

$$((p-g)^{-1})^n = \frac{(-1)^n n!}{(p-g)^{n+1}}$$

$$(-1)^n t^n f(t) \equiv \left(\frac{1}{p-g}\right)^n = \frac{(-1)^n n!}{(p-g)^{n+1}}$$

$$t^n e^{pt} \equiv \frac{n!}{(p-g)^{n+1}}$$

Умножение опр. функции

Пусть $f(t)$ — опр. функция, $f(t) \equiv g/p$

$\int_0^t f(u) du$ — тоже опр. функ.

по (1) и (2) будем:

$$\begin{aligned} 3) \int_0^t f(u) du &\leq \int_0^t |f(u)| du \leq \int_0^t Me^{s_0 u} du = \\ &= \frac{M}{s_0} e^{s_0 u} \Big|_0^t = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) \leq M_1 e^{s_0 t} \Rightarrow \text{опр.} \end{aligned}$$

any можно считать:

$$g/p \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right]' =$$

$$= p \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right]$$

$$\text{т.к. } f(t) = \left(\int_0^t f(u) du\right)'$$

$$\text{где } \int_0^t f(u) du \equiv \frac{g/p}{p}$$

Пример: Найти укр. $g(u) \neq 0$
 $f(t) \equiv 1$, то $\frac{f}{f(t)} = \frac{1}{g(p)}$, при $\operatorname{Re} p > 0$

$$\int_0^t 1 \, d\tau = \frac{g(p)}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$$

$$t = \frac{1}{p^2}$$

$$\int_0^t u \, d\tau = \frac{1/p^2}{p}$$

$$\frac{t^2}{2} = \frac{1}{p^3}$$

$$\frac{t^3}{3} = \frac{2}{p^4}$$

$$t^2 = \frac{2}{p^3}$$

$$t^3 = \frac{2 \cdot 3}{p^4}$$

$$\int_0^t u^2 \, d\tau = \frac{2}{p^4}$$

$$t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Интегрирование укр. $f(t)$

Пусть $\frac{f(t)}{t}$ - функция и пусть

$$\frac{f(t)}{t} = g(p)$$

$$\frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty g(z) \, dz$$

Д-во: Пусть $\left(\frac{f(t)}{t}\right) = F(p)$, тогда по правилу дифференцирования: $-t f'(t) = F'(p)$

$$-t \frac{f'(t)}{t} = F'(p)$$

$$\frac{f(t)}{t} = -F'(p) \quad \text{применяя в пределе}$$

от p до ∞

$$\int_p^\infty F'(p) \, dp = -F(\infty) + F(p) =$$

при $\infty \rightarrow \infty$

$$= F(p) - F(\infty)$$

$$\int_p^\infty g(z) \, dz = -\int_p^\infty F'(p) \, dp$$

$$\int_p^\infty g(z) \, dz = -\int_p^\infty F'(p) \, dp = F(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(t)}{t} = F(p) = \int_p^\infty g(z) \, dz \quad \text{ч.т.д.}$$

Пример: Найти укр.

$$g(u) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\text{т.к. } \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\frac{\sin t}{t} = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} \, dz = \arctg z \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} -$$

$$-\arctg p = \arctg \frac{1}{p}$$

$$\frac{\sin t}{t} = \arctg \frac{1}{p}$$

Теорема запаздывания:

Если оригинал $f(t) \rightleftharpoons g(p)$ и $b > 0$, то
 ф-ца $f(t-b) \rightleftharpoons e^{-bp} g(p)$

Док-во: $f(t-b) \rightleftharpoons \int_0^\infty e^{-pt} f(t-b) dt$

переходим на интегрирование:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t-b) dt + \int_0^\infty e^{-pt} f(t-b) dt \text{, но}$$

$$f(t-b) = 0 \text{ при } t-b < 0$$

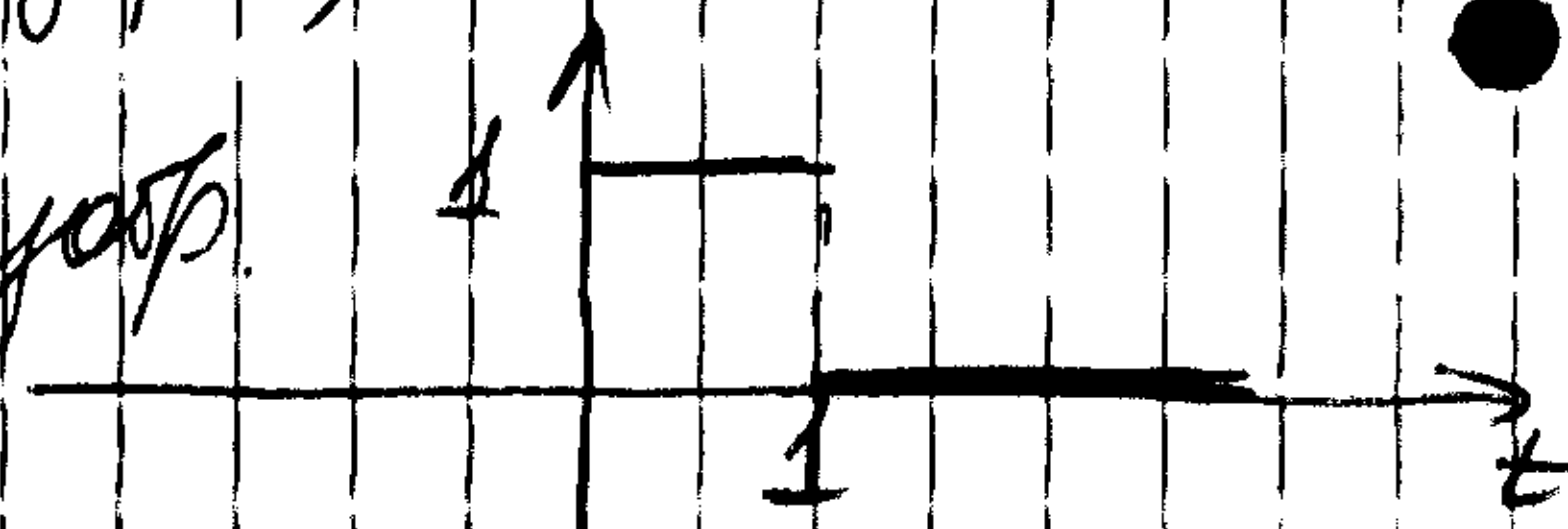
$$\begin{aligned} \textcircled{=} \int_0^\infty e^{-pt} f(t-b) dt & \left\{ \begin{array}{l} t < b \quad dt = du \\ t = u+b \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^\infty e^{-p(u+b)} f(u) du = \int_0^\infty e^{-pb} e^{-pu} f(u) du = \\ &= e^{-pb} \underbrace{\int_0^\infty e^{-pu} f(u) du}_{g(p)} = e^{-pb} g(p) \quad \text{ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$f(t-b) \rightleftharpoons e^{-bp} g(p)$$

Замена масштаба

Если $f(t) \rightleftharpoons g(p)$, $a > 0$, $b > 0$, то
 $f(at-b) \rightleftharpoons \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}p} g(\frac{p}{a})$

Пример: Найти изобр.



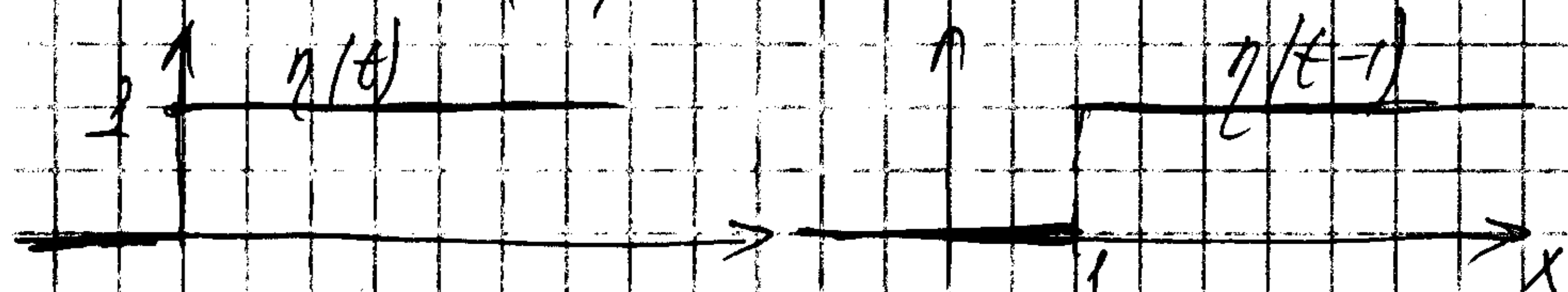
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$$

$$\eta(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\eta(t) \rightleftharpoons \frac{1}{p}$$

$$\eta(t-1) = \begin{cases} 1, & t-1 \geq 0 \\ 0, & t-1 < 0 \end{cases}$$

$$\eta(t-1) = \begin{cases} 1, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

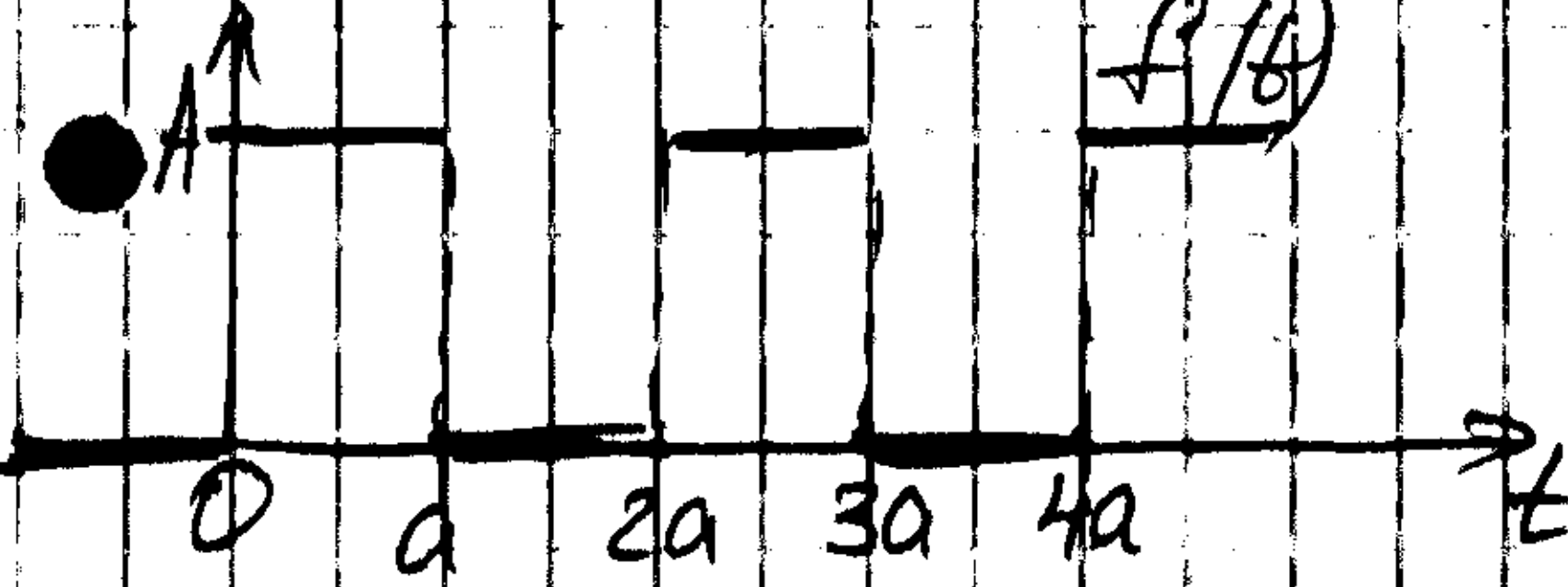


$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\eta(t-1) \rightleftharpoons e^{-p} g(p) = \frac{e^{-p}}{p}$$

$$f(t) \rightleftharpoons \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1-e^{-p}}{p}$$

Пример: Найти изобр. периоду ф-цы:



$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} A dt + \int_0^{+\infty} 0 dt + \\
 &+ \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot A \cdot dt + \dots + \int_0^{+\infty} e^{-pt} A dt + \dots = \\
 &= A \cdot \left[\frac{e^{-pt}}{(-p)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{+\infty} + \dots + \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{+\infty} + \dots \right] = \\
 &= -\frac{A}{p} \left[e^{-pa} - 1 + e^{-3pa} - e^{-2pa} + \dots + e^{-(2n+1)pa} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-2nap} + \dots \right] = \frac{A}{p} \left[1 - e^{-pa} + e^{-2pa} - e^{-3pa} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \dots + e^{-2nap} - e^{-(2n+1)ap} + \dots \right] = \frac{A}{p(1+e^{-pa})}
 \end{aligned}$$

$b=1, g=-e^{-pa}$
 при $|e^{-pa}| < 1$ $p=s_0+ic$
 $|e^{-pa}| = |e^{-sa}|/|e^{-ica}| \Rightarrow e^{-sa} < 1$ при $\text{Re } p = s_0 > 0$

Теорема аналогии:
 Пусть $f(t) \doteq g(p)$, $\alpha - \forall$ комплексн. число
 Тогда $e^{-\alpha t} f(t) \doteq g(p+\alpha) \rightarrow \boxed{\text{при } \text{Re}(p+\alpha) > s_0}$
Док-ва:
 $e^{-\alpha t} f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt =$
 $= g(p+\alpha)$
 $f(t) \doteq g(p)$ при $\text{Re } p > s_0$

Пример: Найти образ $e^{-\alpha t} \cos \omega t$
 $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ при $\text{Re } p > 0$

$$e^{-\alpha t} \cos \omega t \doteq \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

Свертка двух ф-ий.
 Оп: Сверткой 2-х ф-ий $a(t)$ и $b(t)$ действ. пер-го t и м-а ф-ий $c(t)$, опре-д. св-а: $c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-\tau) b(\tau) d\tau$

Если $a(t)$ и $b(t)$ - огранич., то:
 $c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t-\tau) b(\tau) d\tau = \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau$

$b(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ $(0, t) \neq 0$
 $a(t-\tau) = 0$ при $t-\tau < 0$, т.е. при $\tau > t$

Пример: Найти свертку:
 $a(t) = t, b(t) = e^t$
 $a(t) * b(t) = \int_0^t \underbrace{(t-\tau)}_u \underbrace{e^\tau}_{v'} d\tau = \int_{u=t}^{u=0} \underbrace{v=e^\tau}_{u'=1} du =$
 $= (t-\tau) e^\tau \Big|_0^t + \int_0^t e^\tau d\tau = (t-\tau) e^\tau \Big|_0^t +$
 $+ e^\tau \Big|_0^t = t e^0 + e^t - e^0 = e^t + t - 1 = c(t)$

Теорема умножения изображений:

Произведем x -изобр $g_1(p)$ и $g_2(p)$
 св. изобр. свертки, соответств. оригиналов

$$f_1(t) \stackrel{\text{свртка}}{=} g_1(p) \quad f_2(t) \stackrel{\text{свртка}}{=} g_2(p)$$

$$f_1(t) * g_1(t) \stackrel{\text{свртка}}{=} g_1(p) \cdot g_2(p)$$

Пример: Найти оригинал $f(t)$ по
 изображению: $g(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} = e^t + t - 1$

$$g(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1}$$

$$g_1(p) \stackrel{\text{свртка}}{=} t \quad \frac{1}{p-1} \stackrel{\text{свртка}}{=} e^t$$

$$g_1 \cdot g_2 \stackrel{\text{свртка}}{=} t * e^t = \int_0^t (t-\tau) e^\tau d\tau = e^t + t - 1$$

Пример: Найти оригинал по изобраз.

$$g(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1}$$

$$\frac{p}{p^2+1} \stackrel{\text{свртка}}{=} \cos t \quad \frac{1}{p^2+1} \stackrel{\text{свртка}}{=} \sin t$$

$$g_1 \cdot g_2 \stackrel{\text{свртка}}{=} \cos t * \sin t = \int_0^t \cos(t-\tau) \sin \tau d\tau =$$

$$= \int_0^t \sin \tau - \sin(t-2\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\sin t}{2} \Big|_0^t - \frac{\cos(t-2\tau)}{4} \Big|_0^t = \frac{1}{2} t \sin t$$

8.05.88

Нахождение оригинала по изображению (Обратное преобразование Лапласа)

$$L: f(t) \equiv F(p)$$

$$L^{-1}: F(p) \equiv f(t)$$

Теорема: Если $g(p)$ - ф-ия комплексного пер.

$p = \sigma + i\omega$, удов.

1) $g(p)$ - анал. в окрестности $\text{Re } p > \sigma_0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + i\omega)| d\omega$ - суг. при $\forall \sigma > \sigma_0$

3) $g(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$ и при $\text{Re } p > \sigma$.

Теорема: $g(p)$ св. изобр. для оригинала

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} g(p) dp$$

- ф-ла Меллини
 - обратная ф-ла
 преобр. Лапласа

Интеграл берется вдоль σ и прямой, такой
 что $\sigma \in C$; $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$

Теорема: $F(p)$ - однозначная ф-ия комплексного
 пер-го, она имеет конечное число особых точек

$p_1, p_2, \dots, p_n$, располож. в огранич. час-
 тии K и/или ∞ , то $f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{p_k} \{ e^{pt} F(p) \}$

$$f(p) = \frac{p_n(p)}{Q_m(p)}$$

если степень $n < m$

Пример. Найти оригинал

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{(p+i)^3(p-i)^3}$$

$$p^2+1=0$$

$p_1 = i$
 $p_2 = -i$ — корни 3-го порядка

$$f(t) = \operatorname{res}_{i} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} \right\} + \operatorname{res}_{-i} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} \right\}$$

$$\operatorname{res}_{i} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} \right\} = \lim_{p \rightarrow i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left\{ e^{pt} \frac{(p-i)^3}{(p^2+1)^3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow i} \frac{d^2}{dp^2} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right\}$$

$$\operatorname{res}_{-i} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow -i} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3} \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{8} (3+t^2) \sin t - \frac{3}{8} t \cos t$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

Ф-ла Дюамеля.

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — вып. функции на $(0, +\infty)$, оригиналы $f_1(t) \equiv g_1(p)$ и $f_2(t) \equiv g_2(p)$

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \equiv$$

$$= \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv g_1(p) \cdot g_2(p)$$

$$f_2(t) * f_1(t) \equiv g_1(p) \cdot g_2(p)$$

$$\text{Рассм. } \varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$$

Применим к ф-ле $\varphi(t)$ теорему о вып-ых оригиналах.

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) \equiv p \cdot g_1(p) \cdot g_2(p) - \varphi(0)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) \equiv p g_1(p) g_2(p)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \equiv$$

Проверка от нас. яв-ся параметр

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau) d\tau = \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(t, \tau) d\tau + f(t, b(t)) \frac{db}{dt} - f(t, a(t)) \frac{da}{dt}$$

$$\ominus \int_0^t f_1(\tau) f_{2t}'(t-\tau) d\tau + f_1(t) f_2(0) = 0$$

$$\int_0^t f_1(\tau) f_{2t}'(t-\tau) d\tau + f_1(t) f_2(0) = p g_1(p) g_2(p) \bullet$$

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_{2t}'(\tau) d\tau + f_1(t) f_2(0) = p g_1(p) g_2(p)$$

по формуле

$$\int_0^t f_2(t-\tau) f_{1t}'(\tau) d\tau + f_2(t) f_1(0) = p g_2(p) g_1(p) \bullet$$

Пример найти оригинал гел.

$$g(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$g(p) = p \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p+1}$$

$$g_1(p) = \frac{1}{p-1} \doteq e^t$$

$$g_2(p) = \frac{1}{p+1} \doteq e^{-t}$$

$$f_1(0) = 1, f_1' = e^t, f_2(t) = e^{-t}$$

$$p \frac{1}{p+1} \frac{1}{p-1} \doteq \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{\tau} d\tau + e^{-t} \cdot 1 =$$

$$= \int_0^t e^{t-t} e^{\tau} d\tau + e^{-t} = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau + e^{-t} =$$

$$= e^{-t} \frac{e^{\tau}}{1} \Big|_0^t + e^{-t} = \frac{e^{t^0} - e^{-t}}{1} + e^{-t} =$$

$$= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = ch t$$

$$\frac{p}{p^2-1} \doteq ch t$$

- Решение линейных дифференциальных ур-ий с постоянными коэффициентами.

$$x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

- $x = x(t)$

- $x(t_0) = x_0$

$$x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$$

- $x'(t_0) = x_0^1$

- $x''(t_0) = x_0^2$

Применяем преобр. Лапласа к ур-ию $x(t)$ и ко всем ее производным

$$x(t) \doteq \overline{X}(p) \text{ ур-е}$$

- $x'(t) \doteq p \cdot \overline{X}(p) - x(0)$

- $x''(t) \doteq p^2 \overline{X}(p) - p x(0) - x'(0)$

Пример: Решить диф. ур-ие:

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 1$$

- $x(t) \doteq \overline{X}(p)$

$$x'(t) \doteq p \overline{X}(p) - x(0) = p \overline{X}(p)$$

$$x'' = p^2 x(p) - px(0) - x'(0) = p^2 x(0) - 1$$

$$p^2 \bar{x}(p) - 1 + 3p\bar{x}(p) + 2\bar{x}(p) = 0$$

$$\bar{x}(p)(p^2 + 3p + 2) = 1$$

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$= \frac{A(p+2) + B(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(A+B) + 2A+B}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ -B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} -B=1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Решение системы ЛДУ с
постоянными коэффициентами

Пример:

$$\begin{cases} x' = x - 2y - 2z \\ y' = 2x + 7y + 5z \\ z' = -2x - 4y - 2z \end{cases}$$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 3$$

$$z(0) = -2$$

Решение:

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x}(p) \\ y(t) &= \bar{y}(p) \\ z(t) &= \bar{z}(p) \end{aligned}$$

$$x'(t) = p \cdot \bar{x}(p) - x(0) = p \bar{x}(p)$$

$$y'(t) = p \cdot \bar{y}(p) - y(0) = p \bar{y}(p) - 3$$

$$z'(t) = p \cdot \bar{z}(p) - z(0) = p \bar{z}(p) + 2$$

$$p \bar{x}(p) = \bar{x} - 2\bar{y} - 2\bar{z}$$

$$p \bar{y} - 3 = \bar{x} - 2\bar{y} - 2\bar{z}$$

$$p \bar{z} + 2 = -2\bar{x} - 4\bar{y} - 2\bar{z}$$

$$\begin{cases} (p-1)\bar{x} + 2\bar{y} + 2\bar{z} = 0 \\ -2\bar{x} + (p-7)\bar{y} - 3\bar{z} = 3 \\ 2\bar{x} + 4\bar{y} + (p+2)\bar{z} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)\bar{x} + 2\bar{y} + 2\bar{z} = 0 \\ -2\bar{x} + (p-7)\bar{y} - 3\bar{z} = 3 \\ 2\bar{x} + 4\bar{y} + (p+2)\bar{z} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)\bar{x} + 2\bar{y} + 2\bar{z} = 0 \\ -2\bar{x} + (p-7)\bar{y} - 3\bar{z} = 3 \\ 2\bar{x} + 4\bar{y} + (p+2)\bar{z} = -2 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & p-7 & -3 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 & 2 \\ -2 & p-7 & -3 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}} = \frac{-2(p-2)}{(p-3)(p-2)(p-1)} = \frac{-2}{(p-1)(p-3)}$$

$$= \frac{A}{p-1} - \frac{1}{p-3}$$

$$\frac{1}{p-1} = e^t$$

$$\frac{1}{p-3} = e^{3t}$$

$$x(t) = e^t - e^{3t}$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} p-1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 & 2 \\ -2 & p-7 & -3 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}}$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} p-1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 & 2 \\ -2 & p-7 & -3 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}}$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} p-1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 & 2 \\ -2 & p-7 & -3 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}}$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} p-1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 & 2 \\ -2 & p-7 & -3 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}}$$

$$z = 2e^t - 2e^{2t} + 2e^{3t}$$

$$y = -2e^t + 2e^{2t} + 2e^{3t}$$

Пример

$$x'' - 3x' + 2x = e^t$$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

$$x(t) \doteq \bar{x}(p)$$

$$\bar{x}(t) = p\bar{x} - 0 = p\bar{x}$$

$$x''(t) = p^2\bar{x} - px(0) = x'(0) = p^2\bar{x}$$

$$p^2\bar{x} - 3p\bar{x} + 2\bar{x} = \frac{1}{p-1}$$

$$\bar{x}(p^2 - 3p + 2) = \frac{1}{p-1}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{(p-1)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{(p-1)(p-1)(p-2)} = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)}$$

$$x(t) = \operatorname{res}_{p=2} \left[\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)} \right] + \operatorname{res}_{p=1} \left[\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)} \right] =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 2} \frac{e^{pt}(p-2)}{(p-1)^2(p-2)} + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)} \right) =$$

$$= \frac{e^{2t}}{1} + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \frac{e^{pt}}{p-2} = e^{2t} + \lim_{p \rightarrow 2} \frac{e^{pt}(p-2) - e^t}{(p-2)^2} =$$

$$= e^{2t} + \frac{te^t(1) - e^t}{1} = e^{2t} - e^t - te^t$$

$$x(t) = e^{2t} - (t+1)e^t$$

15.05.08.

Применение интеграла Дюамеля

к решению диср. ур-ий

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2x'' + a_1x' + a_0x = f(t)$$

$$x = x(t)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

решение той ж-и Коши для л. правой части, являющейся ординатой, может быть получено если известно решение той же ур-ии с правой частью = единичной ср-ии $\eta(t)$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = \eta(t)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

$$y(t) = ?$$

$$\text{Пусть } y(t) \doteq \tilde{y}(p)$$

$$y'(t) \doteq p\tilde{y}$$

$$y''(t) \doteq p^2\tilde{y}$$

$$y^{(n)}(t) \doteq p^n\tilde{y}$$

Применим преобраз. Лапласа:

$$p^n \tilde{y} + a_{n-1} p^{n-1} \tilde{y} + \dots + p^2 a_2 \tilde{y} + a_1 p \tilde{y} + a_0 \tilde{y} = \frac{1}{p}$$

$$(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \tilde{y} = \frac{1}{p}$$

$$\tilde{y} \cdot p = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Допустим, мы нашли $y(t)$, кот. явл. орг. $\tilde{y}$
 Теперь применим преобр. Лапласа для
 кот. ур-ня с произв. правой частью:

$$x(t) \doteq \tilde{x}(p)$$

$$x' \doteq \tilde{x} p$$

$$x'' \doteq \tilde{x} p^2$$

$$\tilde{x}^{(n)} \doteq \tilde{x} p^n$$

$$f(t) \doteq F(p)$$

$$p^n \tilde{x} + a_{n-1} p^{n-1} \tilde{x} + \dots + a_2 p^2 \tilde{x} + a_1 p \tilde{x} + a_0 \tilde{x} = F(p)$$

$$\tilde{x} = \frac{F(p)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

$$\tilde{x} = F(p) p \tilde{y} = p \tilde{y} \underbrace{F(p)}_{\text{уобр } f(t)}$$

$$p \tilde{y} F(p) \doteq \int_0^t f(\tau) y'(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) \doteq \int_0^t f(t-\tau) y'(\tau) d\tau$$

если мы нашли $y(t)$; $f(t)$ -задано,
 то найдем решение для $x(t)$

Пример:

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = e^t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

Вспомог. ур-ие:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \eta(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) \doteq \tilde{y}(p)$$

$$y'(t) \doteq p \tilde{y}$$

$$y''(t) \doteq p^2 \tilde{y}$$

$$p^2 \tilde{y} - 3p \tilde{y} + 2\tilde{y} = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 - 3p + 2) \tilde{y} = \frac{1}{p}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{p(p-2)(p-1)} = \frac{A^{(p-2)(p-1)(p-1)p}}{p} + \frac{B^{(p-1)p}}{p-2} + \frac{C^{(p-2)p}}{p-1} =$$

$$= \frac{A(p^2 - 3p + 2) + B(p^2 - p) + C(p^2 - 2p)}{p(p-2)(p-1)}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -3A - B - 2C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{y}(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} \doteq \frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$y'(t) = -e^t + e^{2t}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(t-\tau) y'(\tau) d\tau = \int_0^t e^{t-\tau} (e^{2\tau} - e^{\tau}) d\tau = \\ &= e^t \int_0^t (e^{\tau} - 1) d\tau = e^t [e^{\tau} - \tau]_0^t = e^t (e^t - t - 1) = \\ &= e^{2t} - e^t (t+1) \end{aligned}$$

$f(t)$ - оригинал (латинский язык)
(ф-ия удовл 3-ей св-ии)

$$F(p) \doteq f(t)$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$$F(p) - \text{изобр: } f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp - \text{Мелена}$$

если им. конечн. число точек разрыва:

Т.: Если $F(p)$ - одн. ф-ия в каждой части

пл-ти имеем конечн. число особ. точек:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{p_k} (e^{pt} F(p))$$

Теор: Если $F(p)$ - аналитична в нек. окр-ти
бесконечно удал. точки и в этой окрестн:

$|p| > R$ имеем Лоранское разложение:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{p^k}, \text{ но}$$

е оригиналы $f(t)$ свилеса:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Пример:

$$F(p) = \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+1}} - \text{аналитична в беск. удам. т-е.}$$

$$e^{-\frac{1}{p}} = 1 + (-\frac{1}{p}) + \frac{1}{2!} (-\frac{1}{p})^2 + \frac{1}{3!} (-\frac{1}{p})^3 + \dots$$

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$$

Преобразование Фурье.

Пусть $f(t)$ - интер. на $(-\infty, +\infty)$ и огра-
ничена на всяком конечном интервале.

$$\text{тогда } F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

преобр. Фурье $\uparrow$

$$\text{Дир: } f(t) * g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

свертка 2-х ф-ий.

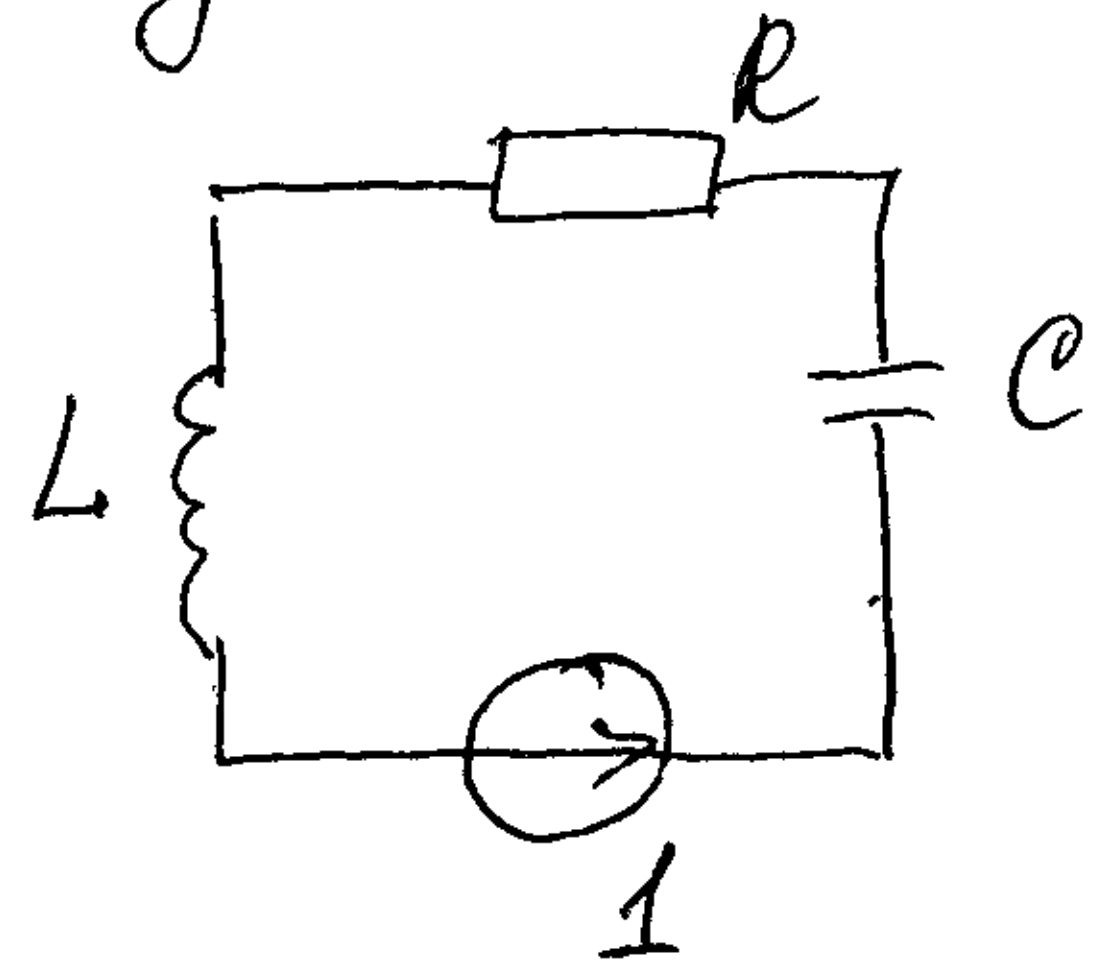
$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \doteq F(u) G(u)$$

$$F(u) \doteq f(t) \quad G(u) \doteq g(t)$$

Опр: Ядро преобразования -

$$F(u) = \int_0^\infty f(t) K(u, t) dt$$

Пример: Найдем силу тока $i(t)$ при включении ЭДС $= 1$ В, в электрич. цепь, сост. из попер. вкл. самоинд. L , сопр. R , емкостью C



$$U(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$U(t) = R \cdot i(t)$$

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 1$$

$$i(0) = 0$$

Применим в данном ур-ии преобраз. Лапласа

$$i(t) \doteq I(p)$$

$$i'(t) \doteq p I(p) - I(0) = p I(p)$$

$$\int_0^t i(t) dt \doteq \frac{I(p)}{p}$$

$$L p I + R I + \frac{I}{C p} = \frac{1}{p}$$

$$I \left(L p + R + \frac{1}{C p} \right) = \frac{1}{p}$$

$$I(p) = \frac{1}{p \left(L p + R + \frac{1}{C p} \right)}$$

$$I = \frac{1}{L p^2 + R p + \frac{1}{C}}$$

Введем $\frac{R}{2L} = \alpha$ $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$

$$I = \frac{1}{L(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} = \frac{1}{L[(p^2 + 2\alpha p + \alpha^2) + \omega_0^2 - \alpha^2]}$$

$$= \frac{1}{L[(p + \alpha)^2 + \omega^2]}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

Смля, что $\alpha < \omega_0$, т.е. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Если к $\sin \omega t$ применим теор. смещения, то

$$I(p) \doteq i(t) = \frac{1}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

α - коэф. затух.

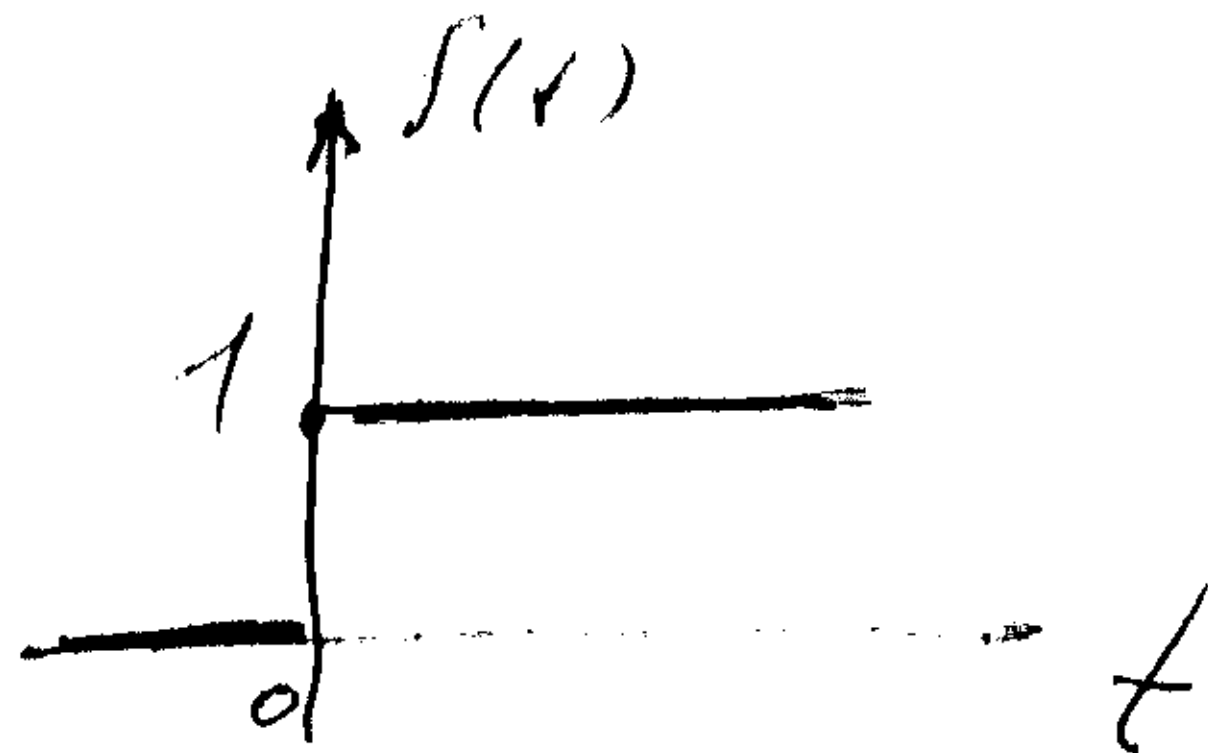
ω - кругов. частота контура

ω_0 - кругов. частота без сопротивления.

Условие $\alpha < \omega_0$ - вырат. требование, чтобы контур был колебат-м.

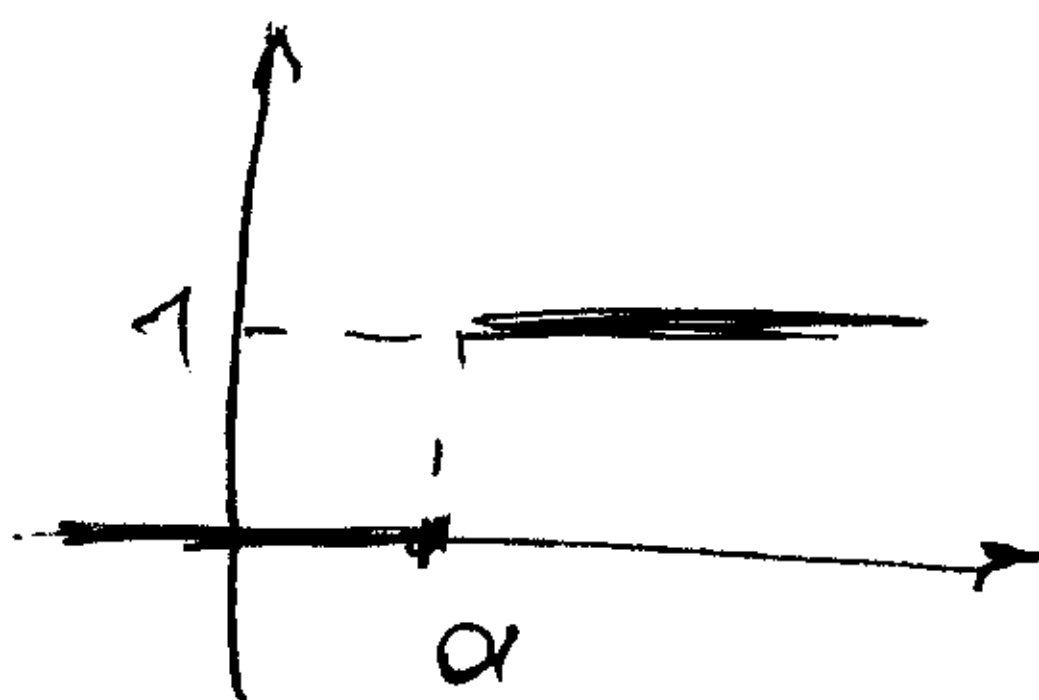
22.05.08

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

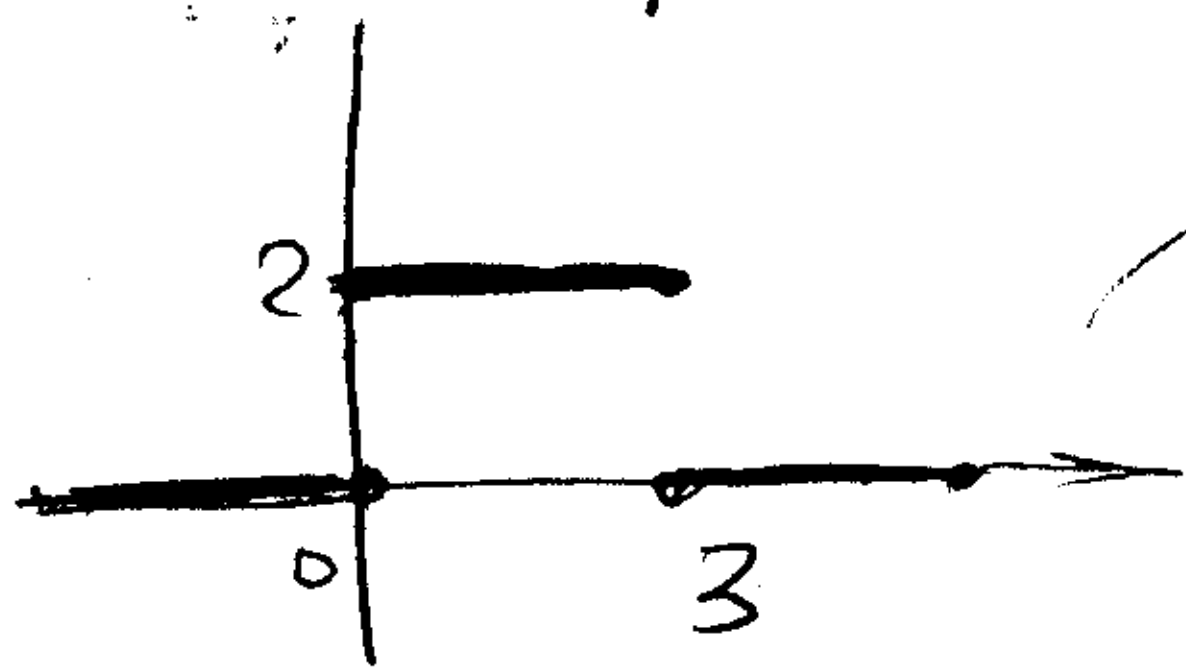


$$\epsilon(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \epsilon(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$



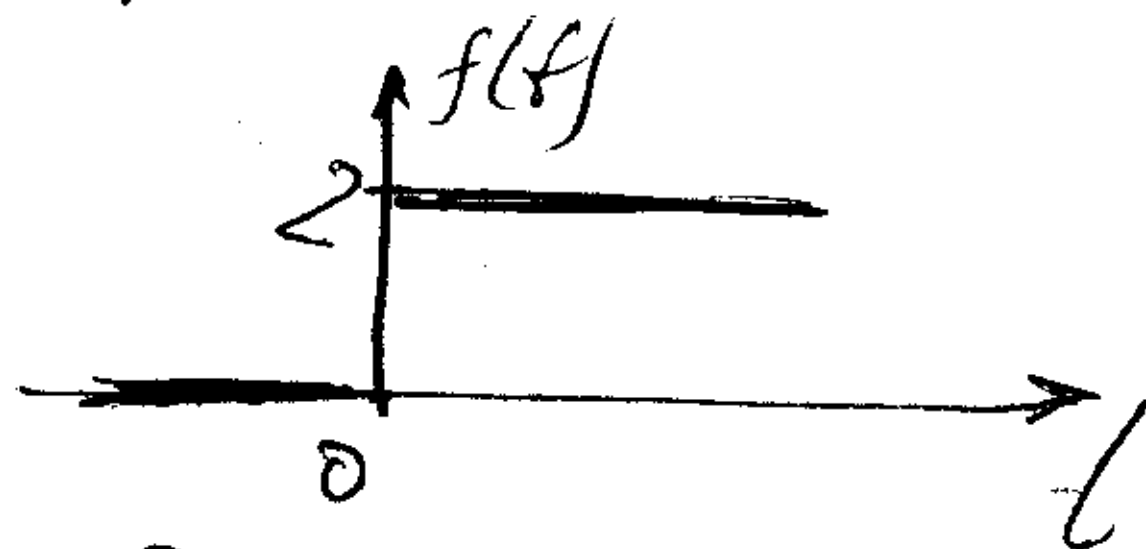
Пример:



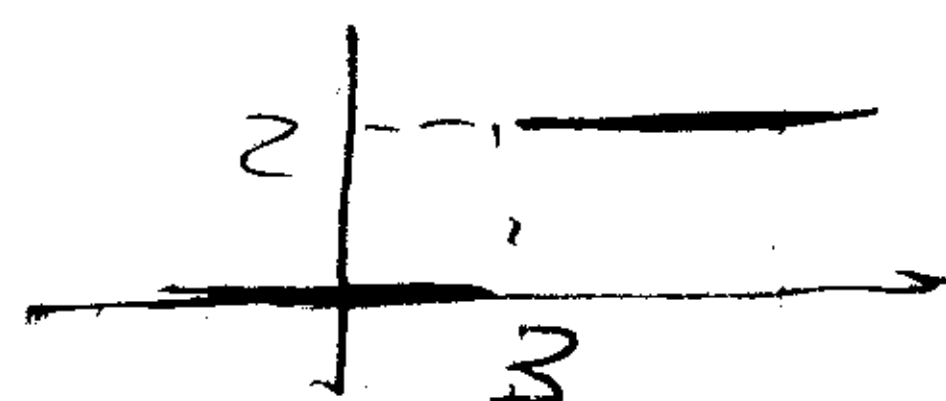
$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^3 e^{-pt} \cdot 2 dt =$$

$$= \frac{e^{-pt}}{-p} \cdot 2 \Big|_0^3 = \frac{-2e^{-3p}}{p} + \frac{2}{p} = \frac{2}{p} (1 - e^{-3p})$$

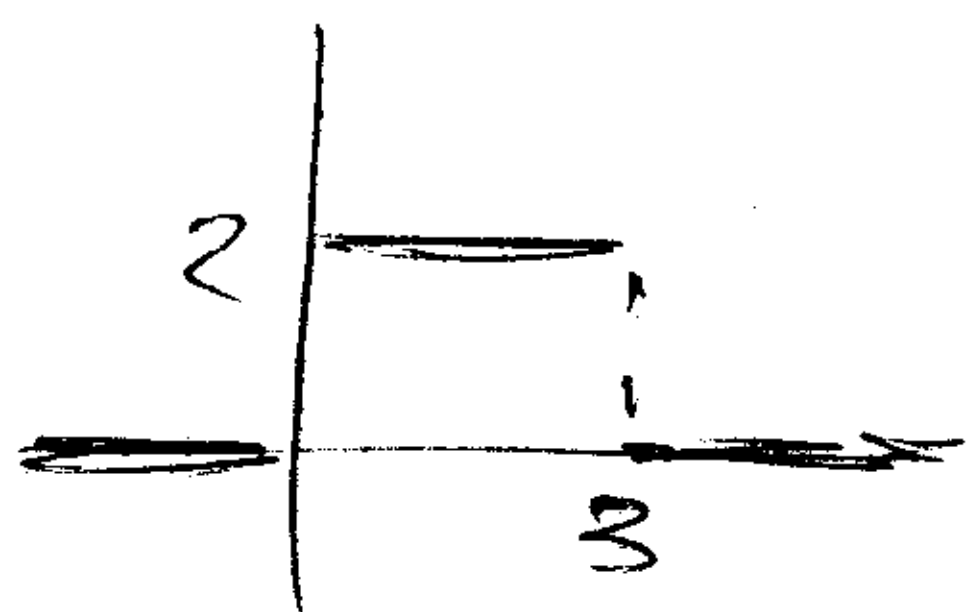
$$2\eta(t) = \begin{cases} 2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$2\eta(t-3) = \begin{cases} 2, & t \geq 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}$$



$$f(t) = 2\eta(t) - 2\eta(t-3)$$



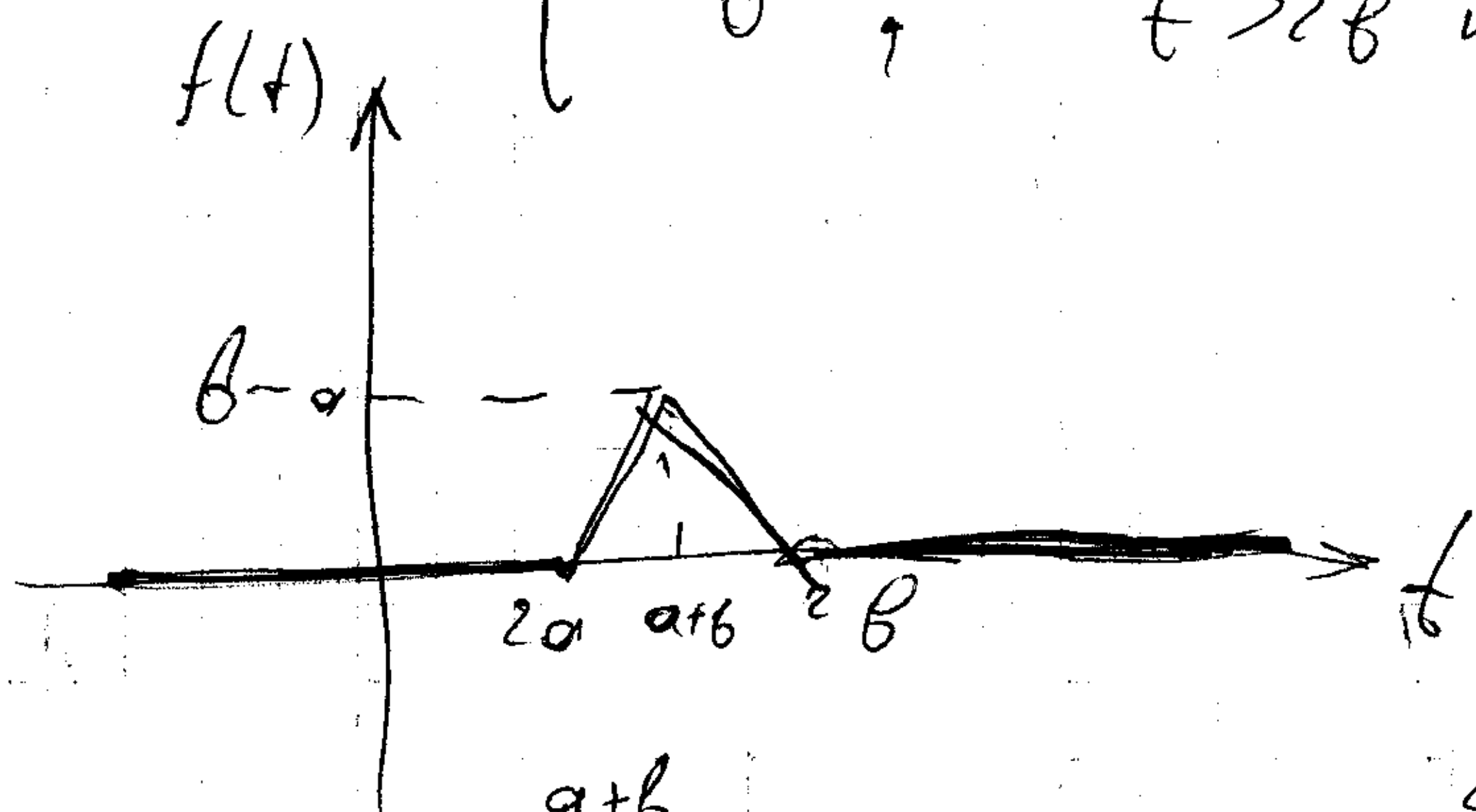
$$\eta(t) = \frac{1}{p}$$

$$\eta(t-a) = \frac{e^{-ap}}{p}$$

$$2\eta(t) - 2\eta(t-3) = \frac{2}{p} - \frac{2e^{-3p}}{p}$$

Пример:

$$f(t) = \begin{cases} t-2a, & 2a < t \leq a+b \\ 2b-t, & a+b < t \leq 2b \\ 0, & t > 2b \text{ или } t \leq 2a \end{cases}$$

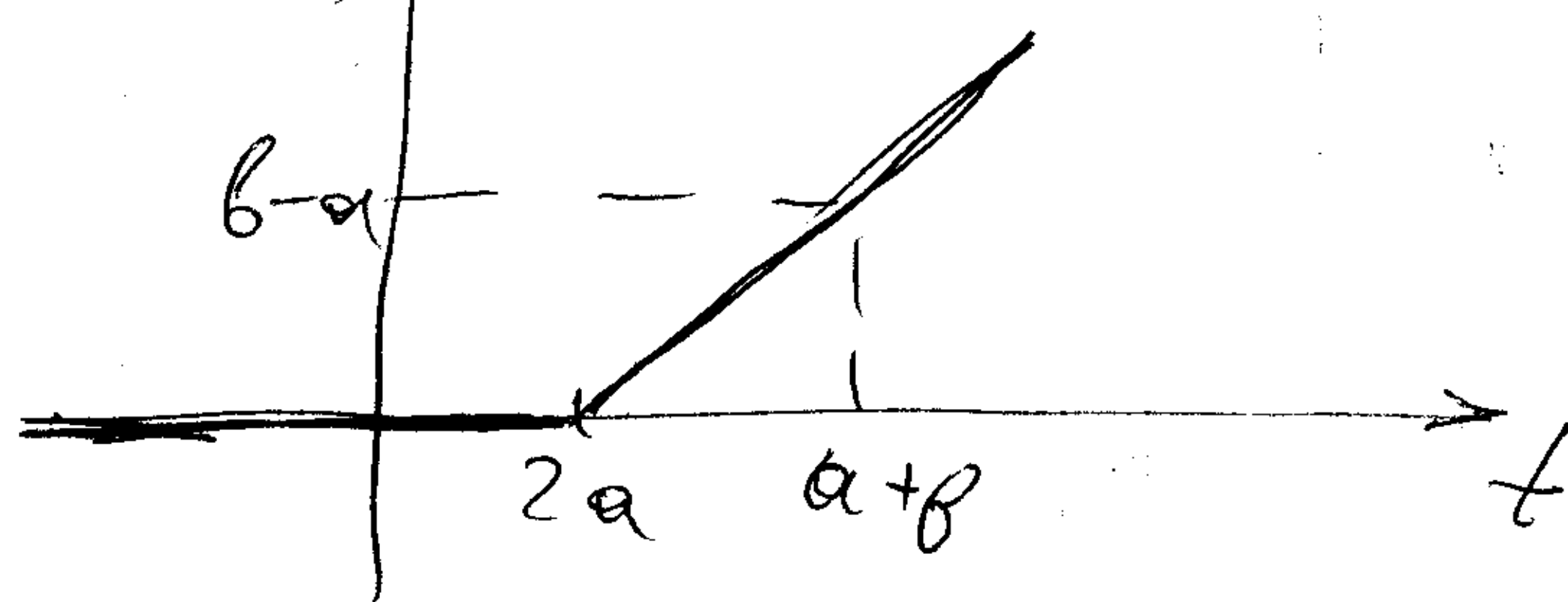


$$F(p) = \int_{2a}^{a+b} e^{-pt} \cdot (t-2a) dt + \int_{a+b}^{2b} e^{-pt} (2b-t) dt$$

$$(t-2a)\eta(t-2a) = \begin{cases} t-2a, & t > 2a \\ 0, & t < 2a \end{cases}$$

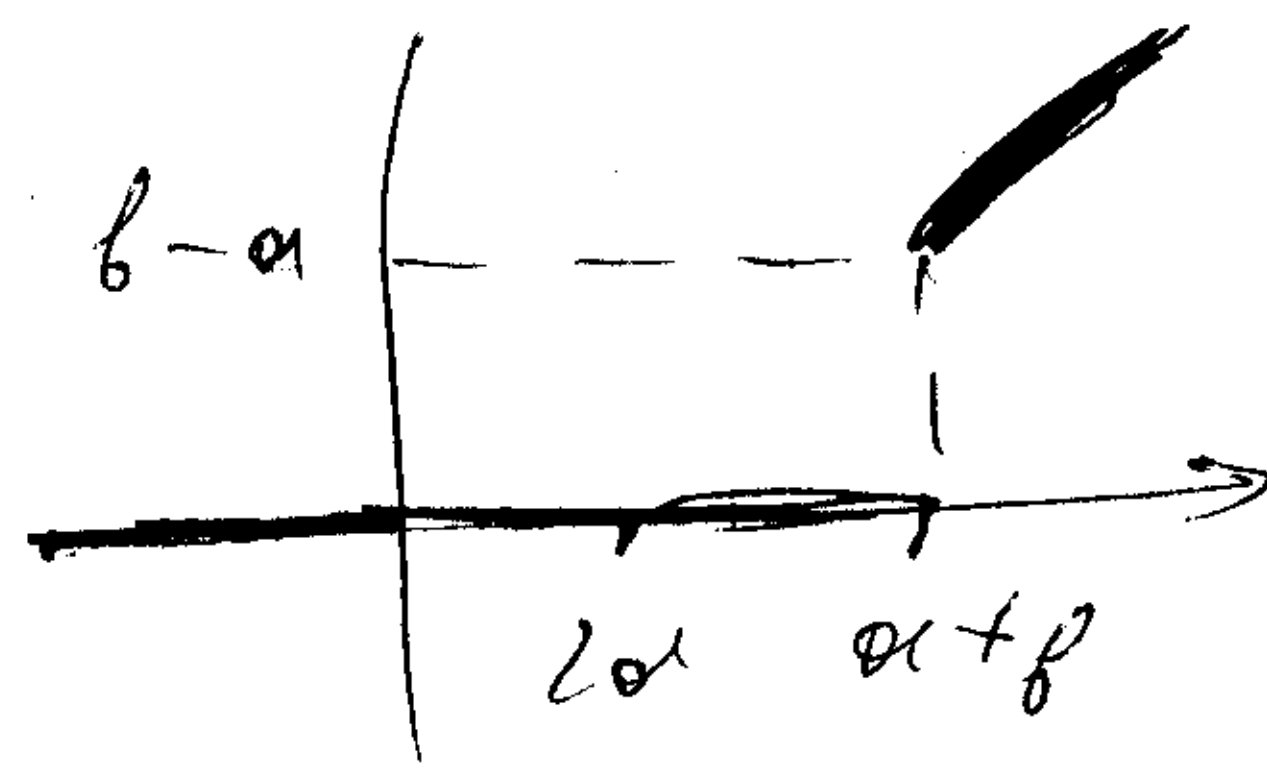
$$\eta(t-2a) = \begin{cases} 1, & t-2a > 0 \\ 0, & t-2a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > 2a \\ 0, & t < 2a \end{cases}$$

$f(t)$



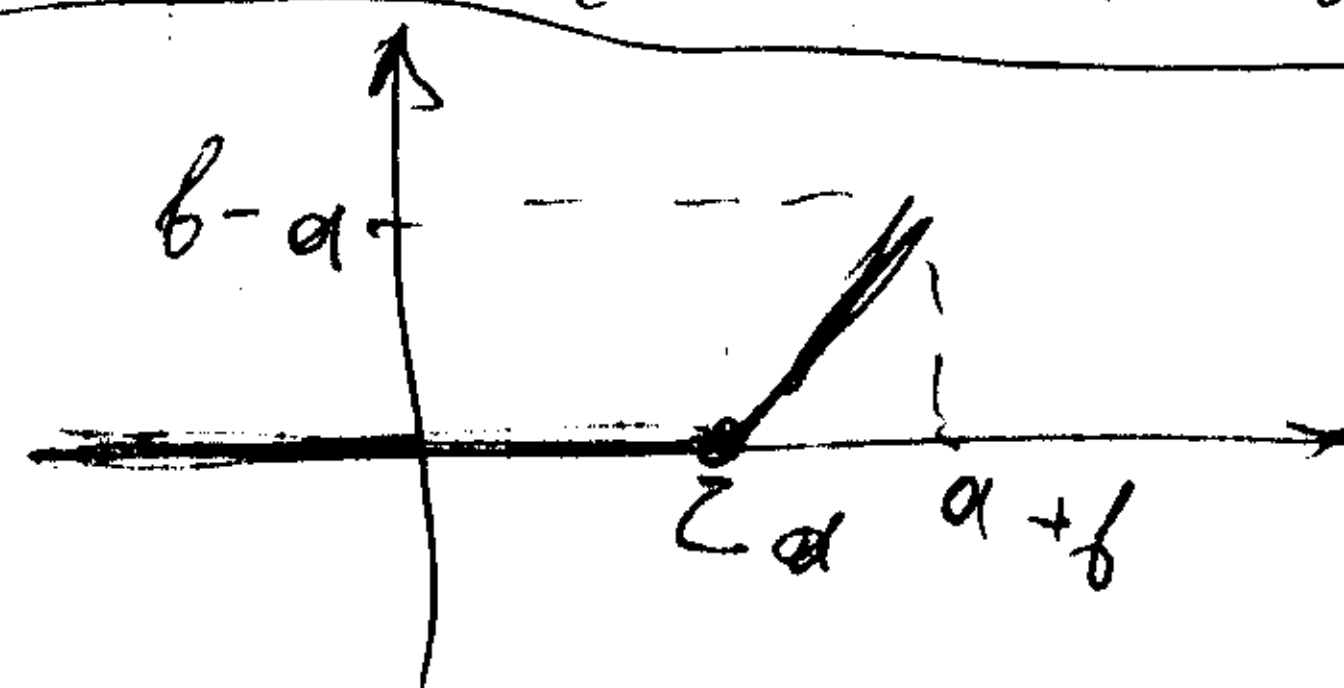
$$\text{расши } (t-2a) \cdot \eta(t-a-b) =$$

$$= \begin{cases} t-2a, & t > a+b \\ 0, & t < a+b \end{cases}$$



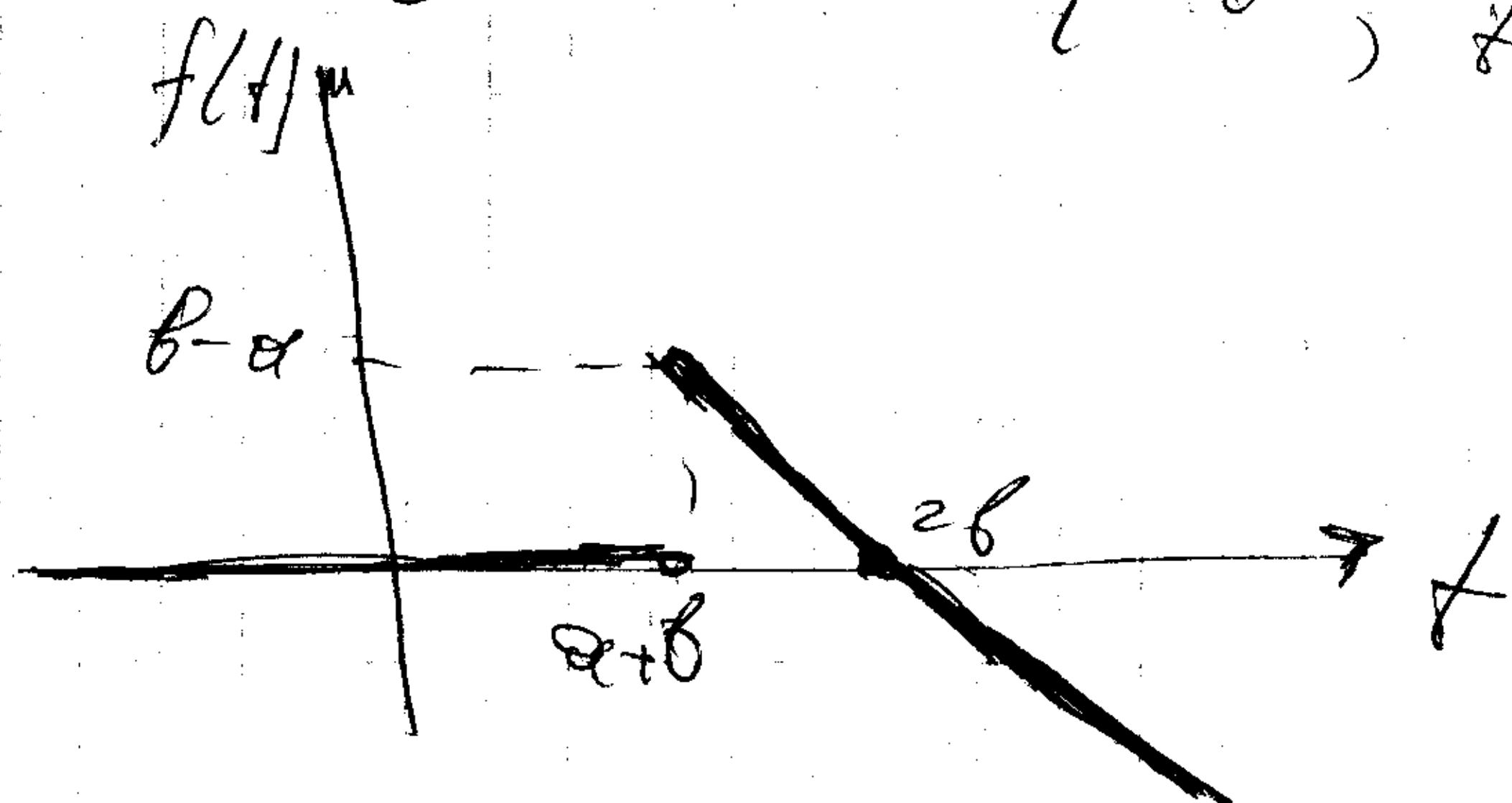
раз-ми:

$$(t-2a)\eta(t-2a) - (t-2a)\eta(t-a-b)$$



1

$$(2b-t) \eta(t-a-b) = \begin{cases} 2b-t, & t > a+b \\ 0, & t < a+b \end{cases}$$



$$(2b-t) \eta(t-2b) = \begin{cases} 2b-t, & t > 2b \\ 0, & t < 2b \end{cases}$$

$$(2b-t) \eta(t-a-b) - (2b-t) \eta(t-2b)$$

(2)

$$f = \textcircled{1} + \textcircled{2} =$$

$$= (t-2a) \eta(t-2a) + (2b-t-t+2a) \cdot$$

$$\eta(t-a-b) - (2b-t) \eta(t-2b) =$$

$$= (t-2a) \eta(t-2a) - 2(t-a-b) \eta(t-a-b) +$$

$$+ (t-2b) \eta(t-2b);$$

$$t \eta t \quad t \doteq \frac{1}{p^2} (t-\tau) = \frac{e^{-\tau p}}{p^2}$$

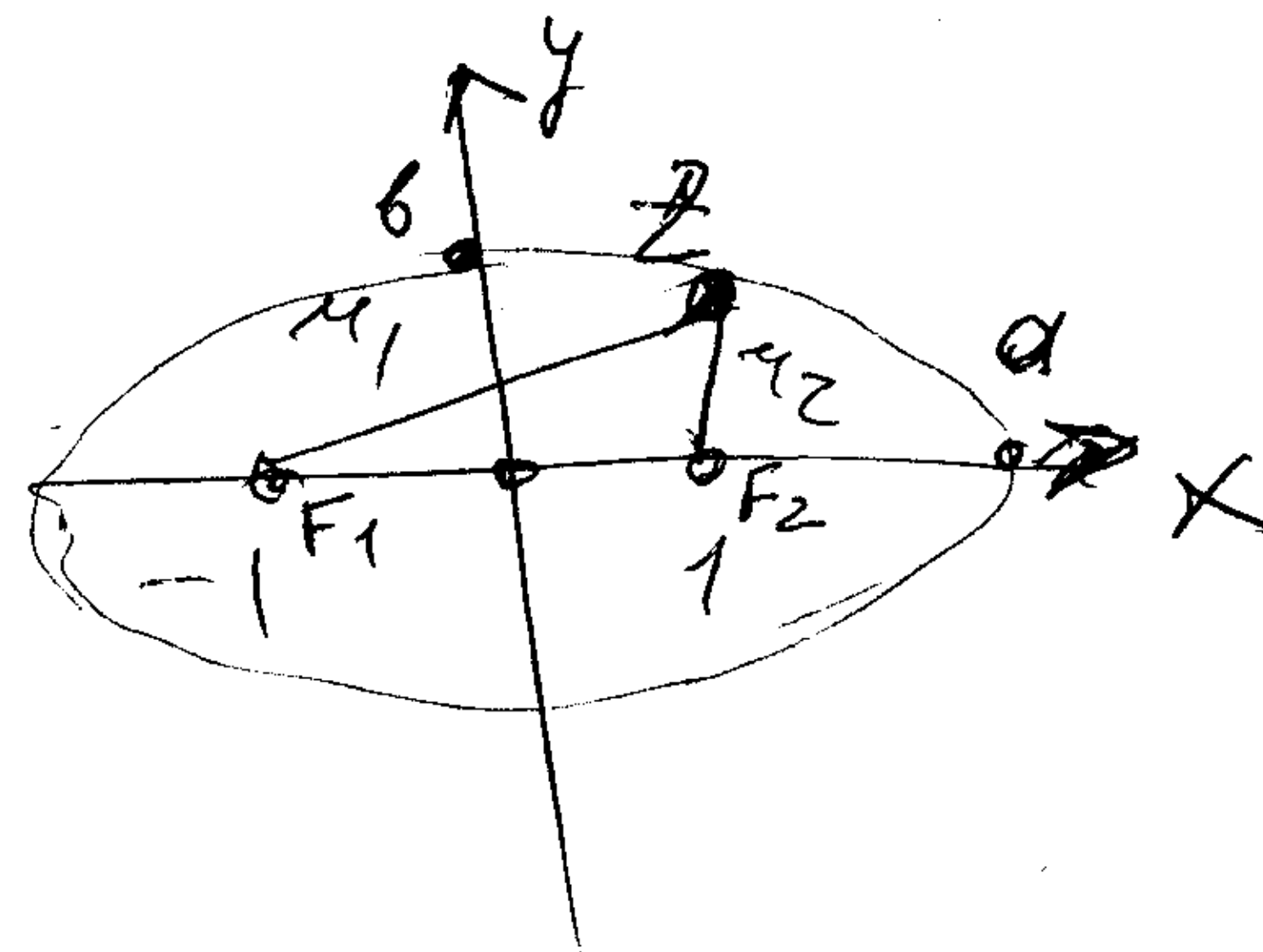
$$f \doteq \frac{e^{-2ap}}{p^2} - 2 \cdot \frac{e^{-(a+b)p}}{p^2} +$$

$$+ \frac{e^{-2bp}}{p^2} = \frac{1}{p^2} (e^{-ap} - e^{-bp})^2$$

2 б) из программы

$$\int \frac{\ln z}{z-10} dz$$

$$\underbrace{|z-1|}_{\mu_1} + \underbrace{|z+1|}_{\mu_2} = 5$$



F_1, F_2 - фокусы

$$F_1, F_2 = 2c = 2 \Rightarrow c=1$$

$$\mu_1 + \mu_2 = 5 = 2a \Rightarrow a=2,5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6,25 - 1 = 5,25$$

$$b = \sqrt{5,25}; \quad \frac{x^2}{6,25} + \frac{y^2}{5,25} = 1$$