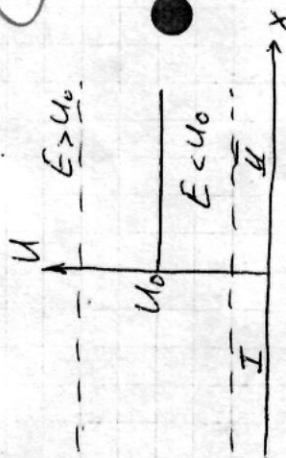


Задача 1.1

1



1. $E > U_0$ $\psi'' + k^2 \psi = 0$, где $k^2 = \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}$

Реш I: $\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Реш II: $\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$

$B_2 = 0$, так как II мореко отра бавна

Условие непрерывности

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ A_1 k_1 + B_1 k_1 = A_2 k_2 \end{cases}$$

к-м отражения: $R = \left(\frac{B_1}{A_1} \right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$

к-м пропущения: $D = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$

Плотность теч-ти: $|\psi|^2 = |A_1|^2 + |B_1|^2$

Плотность тока теч-ти: $j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} - \psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} \right)$

$$j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_2 \frac{d\psi_2^*}{dx} - \psi_2^* \frac{d\psi_2}{dx} \right)$$

Задача 1.2.

Дано:

m

$$U(x) = 0 \quad x < 0; \quad x > a$$

до

$$\text{где II} \quad \text{границы} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0$$

внутри E < U₀

$$\text{вариант. } \psi = e^{\alpha x} + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i\beta$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{\hbar} \Rightarrow \text{где I и II} \quad \psi = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x}$$

$$\psi = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x}$$

$$\text{где II} \quad \psi = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \quad \text{где } \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

$$\text{вариант. } \psi = e^{\beta x} \quad \psi = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \quad \psi = A_3 e^{\beta x} + B_3 e^{-\beta x}$$

$$\psi = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \quad \psi = A_3 e^{\beta x} + B_3 e^{-\beta x}$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} = A_3 e^{i\alpha x} \\ i\alpha A_1 - i\alpha B_1 = \beta A_2 - \beta B_2 \\ \beta A_2 e^{\beta x} - \beta B_2 e^{-\beta x} = i\alpha A_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} = A_3 e^{i\alpha x} \\ i - i\alpha B_1 = \beta A_2 - \beta B_2 \\ \beta A_2 e^{\beta x} - \beta B_2 e^{-\beta x} = i\alpha A_3 \end{cases}$$

$$\text{где } B_1 = \frac{A_1}{A_1}, \quad A_2 = \frac{A_1}{A_1}, \quad B_2 = \frac{A_1}{A_1}, \quad A_3 = \frac{A_1}{A_1}, \quad h = \frac{p}{\hbar} = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

2. E < U₀

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0 \quad \text{II} \quad \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0 \quad \psi = 0$$

E < U₀

$$\text{I} \quad \psi = A_1 e^{i k_1 x} + B_1 e^{-i k_1 x} \quad \text{где } k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\text{II} \quad \psi = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} \quad \text{где } k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$L = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right| / 2$$

② Две $E \rightarrow \psi_0$

Упр. 90-е: $1^2 + \frac{2m}{\hbar} E = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\alpha$

где $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$

где I, II: $\psi_1 = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x}$

$\psi_3 = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x}$

где II: $\psi_2 = A_2 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x}$

где $\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$

5

4

$\psi_1 = (n+1)a_2 - (n-i)\psi_2$
 $2(n-i)e^{\beta x} a_2 - (n+1)e^{-\beta x} \psi_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 = \frac{e^{i(n+i)} e^{-\beta x}}{(n+1)^2 e^{-\beta x} - (n-i)^2 e^{\beta x}}$
 $\psi_2 = \frac{2i(n-i)e^{\beta x}}{(n+1)^2 e^{-\beta x} - (n-i)^2 e^{\beta x}}$

$a_3 = \frac{1}{(n+1)^2} e^{-\beta x} \frac{(n+1)e^{\beta x}}{e^{\beta x} - e^{-\beta x}} e^{-i\alpha x}$

где $\beta e = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} e$

коэф. отражения: $R = \frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2} = \frac{1}{4}$

коэф. пропускания: $D = \frac{|\psi_3|^2}{|\psi_1|^2} = \frac{16h^2}{(h^2 + 1)} = e^{-2\beta x}$

$D \approx |\psi_3|^2 \approx \left(-\frac{1}{(n-1)^2} e^{-\beta x} \right)^2 \approx \frac{16h^2}{(h^2 + 1)} = e^{-2\beta x}$

$R = 1 - D = 1 - \frac{16h^2}{(h^2 + 1)^2} e^{-2\beta x} \approx \frac{16h^2}{(h^2 + 1)^2}$

Нормируем Sep-74

$|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 \Rightarrow |\psi_2|^2 = |\psi_1|^2 \cdot \frac{1}{4} = |\psi_1|^2$

Нормируем Sep-74

$j(\psi_3) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_3 \frac{d\psi_3^*}{dx} - \psi_3^* \frac{d\psi_3}{dx} \right)$

$j(\psi_2) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_2 \frac{d\psi_2^*}{dx} - \psi_2^* \frac{d\psi_2}{dx} \right)$

$j(\psi_1) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} - \psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} \right)$

Задача 1.3.

$U \rightarrow \infty$

Уровень моря - e

Нормы уровня = 0 (0, e)
 $\infty (x=0, x=e)$

Уровень y в Углублении:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \text{ где } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = a \sin(kx + d)$$

$$\psi(0) = a \sin d = 0 \quad \psi(e) = a \sin ke = 0 \Rightarrow d = 0 \quad ke = \pm \pi n$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2me^2} n^2, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Другие варианты, энергия - квадратичная

$$\psi(x) = a \sin\left(\frac{\pi n x}{e}\right) \quad a^2 \int_0^e \sin^2 \frac{\pi n x}{e} dx = 1$$

т.к. на концах уровня (0, e) нормированы.

при $x = 0$, то ψ - e универсально - универсальное.

ψ - e универсально универсально $\left(\frac{1}{2}\right)$ на универсальном

$$a^2 \left(\frac{1}{2}\right) e = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{e}} \sin\left(\frac{\pi n x}{e}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Найдем $\int_0^e \psi^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \Big|_0^e = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2.4} \right) =$

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{x_1}^{x_2} \psi^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \Big|_0^e = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2.4} \right) = \\ &= \frac{2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \end{aligned}$$

Задача 1.4.

Частицы массой m движутся по окружности.

Вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности.

Вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности. Вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности.

Решение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x, y) = A \sin k_1 x \sin k_2 y$$

$$\psi(a, y) = 0; \quad k_1 = \pm \frac{\pi}{a} n_1; \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(x, b) = 0; \quad k_2 = \pm \frac{\pi}{b} n_2; \quad n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_1^2 + k_2^2 = k^2; \quad E_{n_1, n_2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2)$$

$$\text{Нормировка: } \int_0^a \int_0^b \psi^2(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{ab}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\psi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a} n_1\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b} n_2\right)$$

Найдем вероятности нахождения частицы в области

$$P = \int_0^{a/3} \int_0^{b/3} \psi^2(x, y) dx dy = \frac{4}{ab} \left(\int_0^{a/3} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a} n_1\right) dx \right) \left(\int_0^{b/3} \sin^2\left(\frac{\pi y}{b} n_2\right) dy \right)$$

$$= \int_0^{a/3} \cos\left(\frac{2\pi x}{a} n_1\right) dx \int_0^{b/3} \cos\left(\frac{2\pi y}{b} n_2\right) dy =$$

$$= \frac{2}{a^2} \left(\int_0^{a/3} \sin\left(\frac{2\pi x}{a} n_1\right) dx \right) \left(\int_0^{b/3} \sin\left(\frac{2\pi y}{b} n_2\right) dy \right) + \int_0^{a/3} \sin\left(\frac{2\pi x}{a} n_1\right) dx \int_0^{b/3} \sin\left(\frac{2\pi y}{b} n_2\right) dy$$

$$= \frac{2}{a^2} \left(\int_0^{a/3} \sin\left(\frac{2\pi x}{a} n_1\right) dx \right) \left(\int_0^{b/3} \sin\left(\frac{2\pi y}{b} n_2\right) dy \right) + \int_0^{a/3} \sin\left(\frac{2\pi x}{a} n_1\right) dx \int_0^{b/3} \sin\left(\frac{2\pi y}{b} n_2\right) dy$$

$$\frac{2\pi}{a} y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.47$$

Можно считать

$$|\psi|^2 = \psi^2$$

$$\langle x \rangle = \int_0^a x \psi^2 dx = A^2 \int_0^a x \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^a x \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) dx + \frac{2}{a} \int_0^a x dx =$$

$$= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{a^2}{4\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$= -\frac{a^2}{4\pi^2 n^2} \left(\frac{2\pi n}{a} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$= -\frac{a^2}{4\pi^2 n^2} \left(\frac{2\pi n}{a} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a = -\frac{a^2}{4\pi^2 n^2} \left(\frac{2\pi n}{a} \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a\bar{a}}{a^2 n_2} \left| \frac{a}{\pi n_1} \right| - \cos \frac{\pi n_1 \cdot 0}{a} + \cos \frac{\pi n_1 n_2}{3a} - \cos \frac{\pi}{3} \\
 &\quad \cos \left(\frac{\pi n_1}{3} - \frac{\pi l n_2}{a_3} \right) - \cos \frac{\pi n_1 \cdot 0}{a} - \cos \frac{\pi l n_2}{3a} + \\
 &\quad + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \left(\frac{\pi n_1}{3} + \frac{\pi l n_2}{a_3} \right) = \frac{2\pi \cdot a}{3 \cdot a_3 \pi n_1} \\
 &\quad \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi n_1}{3} + \frac{l n_2 \pi}{3a} \right) - \left(\cos \frac{\pi n_1}{3} - \frac{\pi l n_2}{3a} \right) \right) \\
 &\quad p = \frac{2a}{b_{n_1, n_2}} \left(\cos \left(\frac{\pi n_1}{3} + \frac{l n_2 \pi}{3a} \right) - \cos \left(\frac{\pi n_1}{3} - \frac{\pi l n_2}{3a} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Менее важно в данном случае, а.н.н.

$U(x)$: $U(0)=0$; $\psi = Ae^{-\frac{2}{a}x}$, где

$A = A(1)$; A - конст. Найдем $U(x)$,

и.е. найдем E для данного $U(x)$. A - конст. $U(x)$.

Решение

Найдем ψ и ψ' в точке $x=0$

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= -2Aa^2 x / e^{-\frac{2}{a}x} \\ \psi''(x) &= -2Aa^2 e^{-\frac{2}{a}x} - 2Aa^2 x e^{-\frac{2}{a}x} \\ &= -2Aa^2 e^{-\frac{2}{a}x} (1 - 2ax)\end{aligned}$$

Найдем ψ'' и ψ' в точке $x=0$.

$$\psi''(0) = \frac{1}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

$$-2a^2 + 4a^2 x^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) = 0$$

$$\text{при } x=0 \text{ и } U(0)=0, -2a^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\text{найдем } E = \frac{a^2 \hbar^2}{2m}$$

$$U(x) = \frac{2a^2 \hbar^2}{m} x^2$$

Решение

Спе. решение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi = 0$$

$$E = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \text{ где } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int |\psi|^2 dx = 1; \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} dx = 1$$

$$-A A^* \frac{1}{a^2 x} e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} = 1$$

$$-\frac{A^2}{a^2 x} e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} = 1$$

$$\psi = A e^{-\frac{a^2 x^2}{2}}; \psi' = -2Aa^2 x e^{-\frac{a^2 x^2}{2}}$$

$$\psi'' = -2A \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} + x e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} (-2a^2 x) \right] =$$

$$= -2Aa^2 (1 - 2a^2 x^2) e^{-\frac{a^2 x^2}{2}}$$

$$-2Aa^2 (1 - 2a^2 x^2) e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) A e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} =$$

$$-2a^2 + 4a^2 x^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 = 0$$

$$E = \left(\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 + 2a^2 - 4a^2 x^2 \right) \frac{\hbar^2}{2m} =$$

$$= \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{a^2 \hbar^2}{m} - \frac{2a^2 x^2}{m}$$